Knygų Leidimo Komisijos leidinys

A. Jakšto

Naujos trigonometriškos sistemos

Bandymas
filosofiškai nušviesti trigonometrijos
pagrindus



Berlynas
Otto Elsnerio spaustuvė
1922

Vasario 16 d. 1922 m. įkurtojo

Lietuvos Universito
Matematikos-fizikos
Fakultui

šį veikalą skiria

Autorius



Spaudos darbus visomis kalbomis atlieka
Otto Elsner, Berlin S. 42

Prakalba

Sie tyrinėjimai yra bandymas atsakyti į klausimą, kas yra mūsų nūn vartojamoji trigonometrija: ar ji yra absolūti ir vienintelė, ar šale jos galimos dar ir kitos trigonometriškos sistemos, panašiai kaip šale euklidiškės geometriškos sistemos esama ir neeuklidinių. Teigiamasis atsakymas į šį pastarąjį prileidimą mums atrodė vieninteliai tikras jau 1902 metais, kuomet mums pavyko atrasti pirmos šešios iš 28 elementarių naujų trigonometriškų sistemų.

Prie tų šešių, laikui bėgant, klojos paeiliui kitos naujos sistemos, netik elementarės, bet ir sukrautinės. Mes gan smulkmeningai jąs tyrinėjom, lyginom su visuotinai nūn vartojamąja sistema, bet ilgą laiką nevyko mums jos sistematiškai išdėti, iki galop laikraštyje „Internacia Scienca Revuo“ 13-me n-je pasirodė profesoriaus Bourlet'o didelės vertės straipsnis, kame buvo paduota garsaus prancūzų matematiko Ch. Méray'o į geometriškas grupes įdomios pažiūros, kurios ir pastumėjo mus į pageidaujamąjį kelią.

Minėtojo straipsnio dėka mūsų darbas apie trigonometriškas sistemas greitu laiku (17 spalių 1905) tapo trumpai užbaigtas ir pasiųstas tam pačiam profesoriui Bourlet'ui įvertinti.

Garbusis žinovas mūsų išdėtasias idėjas pagyrė, tik buvo nepatenkintas trumpumu paties veikalo, kurs atrodė jam esąs „platesniojo tyrinėjimo planas bei pradžia.“ Todel patarė kai kurias dalis nuodugniau išgvildenti. Tai ir buvo atlikta.

Spaudon prirengtasai veikalas išleistas tapo tarptautine Esperanto kalba 1906 metais Berline[1]), o 1908-siais pasirodė jo vertimas prancūzų kalba, pagamintas prof. Lefèvre'o[2]).

Šitiedvi brošiūri, kad ir buvo išleisti labai stropiai, tačiau abejosna įsibrovė neišvengiamos, formulas renkant, paklaidos, o paskutiniame XIII §, 4 p. skubotai padarytieji apibendrinimai, geriau dalyką ištyrus, pasirodė nevisai tikri. Šiame lietuviškame leidinyje visus tuos trūkumus stengėmės, kiek galėdami, prašalinti.

Tiesą sakant, tai nėra aukščiau minėtosios brošiūros vertimas, bet naujas ir savitas jos perdirbimas. Skyriai I, IV, VI, VIII, IX, XI žymiai praplėsti, o penki pastarieji nuo XIII lig XVII naujai parašyti.

Tokia tai yra šio tyrinėjimo istorija.

Kokia gi jo moksliška vertė?

Apie tai ne mums spręsti.

Asmeniškai mes esam įsitikrinę, kad parodytasai šiame veikale 28 elementarių ir nesibaigiamos daugybės sukrautinių trigonometriškų sistemų sudarymo būdas specialistų matematikų rankose gali nemaž pastumėti pirmyn vis da ligšiol neužbaigtą funkcijų mokslą; taipogi gautoji naujų kreivųjų, apibūdinančiųjų naujas trigonometriškas sistemas, eilė gali nevieną plačios kreivųjų teorijos klausimą aikštėn iškelti ir t.t.

Bet tegu matematiškoji mūsų veikalo pusė ir neturėtų įtakos į tolimesnį plėtojimąsi tos ar kitos matematikos šakos, visgi jame pasiliks kita — filosofiškoji pusė, kuri, mūsų išmanymu, turės visada nemenkos vertės.

---

[1]) Pri novaj trigonometriaj sistemoj. Originale verkis Prof. A. Dombrovski. 1906, Germanujo. Esperanto Verlag Möller et Borel, Berlino S. 42, 32 p in- 8.

[2]) Nouveaux systèmes trigonométriques par A. Dombrovski, traduit de l'Esperanto par E. Lefèvre, professeur à l'Ecole militaire de Belgique. Gand imprimerie à vapeur E. Meyer, Quai du Pont-Neuf, 5. 1908, 42 p. in- 8.

Nes jei Koperniko nurodymas į tai, jog mūsų žemė yra ne centralis pasaulis, bet vienas iš daugybės dangiškųjų kūnų, pripažinta tikrai nustatytu ir neatmainomu, tai tokią pat, rodos, ypatybę reikėtų pripažinti ir šiame veikale įrodytai tiesai, kad nūn vartojamoji trigonometrijos sistema yra toli gražu ne absolūti nei vienintelė, o tik atskiras vienòs iš nesibaigiamos daugybės kitų lygiai galimų ir lygiaverčių trigonometriškų sistemų žygis.

Tuo žvilgsniu mes ir žiūrime į teikiamąjį čia tyrinėjimą, kaipo į tam tikra tiesialinijinės trigonometrijos filosofiją, duodančią suprasti, kaip viena prasta trigonometriškos sistemos ideja gali apsireikšti nesibaigiamoje įvairiausių pavidalų daugybėje, nenustodama tuo nei kiek savo pamatinės vienybės.

Tuo žvilgsniu aukščiau nurodytasai trigonometriškų sistemų įvairumas primena mums kitą – taipgi begalinį — gyvijos ir augmenijos pausaulyje įvairumą, išsirutulojusį iš bendrojo, mokslo patėmyto, gyvų organizmų plano.

Pasakysime dar daugiau — tarp įvairių trigonometriškų sistemų ir visokeriopų gyvijos bei augmenijos formų, mūsų išmanymu, esama ne vien abstrakčios analogijos, bet ir tūlo vidujo sąryšio, kurio regimu išreiškėju bus tam tikras viršujis charakterizuojančiųjų įvairias trigonometriškas sistemas kreivųjų panašumas į kai kurias paprasčiausių tos ar kitos gyvijos karalystės organizmų formas.

Mať teturėdami tam tikrų faktų, mes negalim šios savo minties patvirtinti tikrai moksliškais įrodymais; išreiškiam čia ją kol kas vien kaipo hipotetišką spėliojimą, turintį betgi, mūsų įsitikrinimu, gan didelės tiespanašos.

Šį įsitikrinimą remiame ne tik savo subjektyviu manymu, bet ir šiais metafiziškais protavimais.

Žiūrėdami į pasaulį, kaipo į tvarinį ne aklo atsitikimo, bet Aukštesnės Išminties, ir rasdami gamtoj visur taisyklingą apsireiškimų periodiškumą ir aiškų jų santykiuose tikslingumą, mes būtinai privalome prileisti, jog pasaulio sustatyme esama nesuskaitomai daug įvairių įvairiausių periodiškumo dėsnių.

Bet šioks ar toks periodiškumas matematiškai išreikšti tegalima vien tik pasigaunant tų ar kitų periodiškųjų funkcijų. O kadangi tarp šių pastarųjų pirmoj vietoj stovi trigonometriškos funkcijos, tatai ir galima à priori tvirtinti, kąd tyrinėjant gamtą, ypač jos apsireiškimų dėsnius, trigonometriškos funkcijos pasitaikys gan dažnai. Mokslo istorija visai patvirtina šį spėliojimą. Kad mūsų nūn vartojamoji trigonometrijos sistema tinka vienam iš paprasčiausių judėjimų, būtent dangaus kūnų judėjimui išreikšti, tai yra faktas bet kam gerai žinomas.

Bet iš to, kad Aukštesnioji Išmintis pritaikė ją dangaus mechanikoje ir žemės fizikoje, visai negalima išvedžioti, kad ji ir kituose periodiškumo désniuose, pav. gyvijos bei augmenijos gyvenimo apsireiškimuose, turėtų taipgi taikinti tą pačią ir tik tą vieną sistemą. Aukštesnioji Išmintis be abejo būtų tai padarius, bet tik tame atvejyje, jei nūn vartojamoji trigonometrijos sistema būtų buvus viena vienintėlė. Bet kadangi greta jos esama kitokių sistemų, turinčių savas periodiškas funkcijas, tai prileisti, kad Aukštesnioji Išmintis tvarkydama pasaulį į jas nėr atsižvelgus, būtų tai įtarti ją kažkodel pamėgus vien tiktai nūn vartojamąją sistemą, o kitas visas paniekinus. Bet to niekaip negalima prileisti. Trigonometriškos sistemos kaipo lygiai galimos, yra visos lygiateisės. Taigi, jei nebūtų absurdo prileidus, kad Aukštesnioji Išmintis gali labjau pamėgti vieną trigonometriškąją sistemą, kaip kitas, tai šis pamėgimas galėtų tekti greičiau ne mū-

siškei nūn vartojamąjai, bet tai iš dvidešimts aštuonių elementarių, kuri visiems kampams tur vienokį siną ir kuriai atitinka daili, ją charakterizuojanti, kryžinė linija — mūsų išganymo simbolis.[1]) O kadangi net šis prileidimas vargiai galima priimti, tatai ir nėra jokio pamato manyti, kad Aukštesnioji Išmintis, nustačiusi dangiškųjų kūnų santykius nūn vartojamosios trigonometrijos dėsniais, nerado galima bei reikalinga kitose painesnėse pasaulio srityse laikytis kitų painesnių trigonometriškų sistemų.

Senovės filosofo pasakymas, kad *ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρεῖ* virsta kur kas suprantamesniu, prileidus, kad pasaulį betvarkant, radę pritaikinimo begalo daug trigonometriškų sistemų, o ne viena vienintėlė. Garsusis Leibniz'as kaž-kur yr išsitaręs: Dum Deus calculat, fit mundus. Bet kadangi pasaulyje matom begalinę formų įvairumą, tatai ir reikia prileisti, kad ir „Dievo apskaitymai" daryta ne vienos nūn vartojamosios trigonometrijos formulomis, bet ir daugelio kitų, neišskiriant nei pačių painiųjų.[2])

Tuo baigdami šią prakalbą, laikome savo pareiga tarti čia nuoširdų padėkos žodį gerbiamam Liege'o profesoriui E. Lefèvre'ui,[3]) kurs netik prisiėmė dovanai

---

[1]) Tolesni tyrinėjimai yr parodę autoriui, kad net ir šiuo žvilgsniu mūsų paprastoji trigonometrijos sistema prašoksta naują tekste nurodytąją sistemą, nes šios pastarosios kryžinė linija yra sudaryta iš šakų tam tikros kreivosios linijos, tuotarpu mūsų paprastoji sistema duoda kryžių sudarytą iš tiesiųjų linijų (tangensalės ir kotangensalės).

[2]) Panašiai manyta nesyk ir kitų matematikų. Pav. garsusis Hermite'as, kalbėdamas apie aukštesniosios analizės funkcijas, savo laiške į Stieltjes'ą, yr padaręs šitokį prisipažinimą: „Votre doctrine est la mienne; je crois que les nombres et les fonctions de l'analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de necessité que les choses de la réalité objective et que nous les découvrons, ou les étudions comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes etc. Cfr. Correspondance d'Hermite et de Stieltjès, II, p. 398. Jei tai prileistina kalbant apskritai apie funkcijas, tai juo labjau tai tinka mūsų išrastoms trigonometriškoms sistemoms.

[3]) Deja, per šį karą mirusiam.

prancūzų kalbon išversti mūsų pirmąją brošiūrą apie naujas trigonometriškas sistemas, bet ir papildė ją keliais brangiais savo patėmijimais, kuriais mes šiame veikale ir pasinaudojome.

Taipogi nuoširdžiausią ačiu turime tarti ir gerb. profesoriui Cyr. Vörös'ui iš Budapesto už jo gilias apie mūsų veikalą kritiškas pastabas, kurios padėjo mums įsigilinti į naujų trigonometriškų funkcijų esmę ir XIII skyriuje duoti grynai matematišką jų sąvokojimą.

Kadangi šiandiena koks mokslo veikalas parašyti yra lengviau negu išleisti, tatai negalim čia susilaikyti neišreiškę viešai savo gilaus dėkingumo V. Krėvei-Mickevičiui mielai sutikusiam patarpininkanti tarp autoriaus ir Švietimo Ministerijos, o taíp pat ir pačiai Knygų Leidimo Komisijai, nepasigailėjusiai lėšų šiam veikalui dailiai išleisti.

Belieka dar tarti žodis apie pavartotą šiame veikale matematikos terminologiją. Ji skirias nuo priimtos nūn mūsų vadovėliuose. Ten brukama mokiniams vien tokie žodžiai, kaip matematinis, geometrinis, fizinis, filosofinis ir k. Mes jų vieton dėjome: matematiškas, geometriškas, filosofiškas ir k. Darėm tai atsižvelgdami į neabejotiną faktą, jog mūsų gyvoji kalba būdvardžius su galune-*inis* tevartoja vien materialiams daiktams reikšti, k. š. medinis, geležinis, naminis, laukinis, ir k., arba sąvokoms, iš materialių daiktų atitrauktoms, k. š.: pirmutinis, paskutinis, galinis ir k. Deliai to mūsų gyvoji kalba visai nežino tokių būdvardžių, kaip — tėvinis, brolinis, danginis, poninis, žmoninis, kitoninis, visinis ir k. Tuo remdamies mes ir abejojam, bau mūsų kalbos dvasia leidžia iš matematikos kalti matematinį, iš trigonometrijos — trigonometrinį ir t. t. Būdvardžiai su galūne -*iškas,* mums atrodo, kur kas čia tinkamesni, juoba, kad visi tie mokslo terminai pirmiausia, nukalti

graikų (μαθηματικὸς, φυσικὸς, φιλοσοφικὸς . . .) turi galūnę -ικός, kuri visai atitinka mūsų -*iškas* (sulygink gr. κυνικός su mūsų š u n i š k a s ir k.) ir latvių -*isks*.

Apie kitus terminus, k. š. r a t i l a s, s t i p i n a s, l y g i n y s, mes jau nesykį esam rašę „Draugijoj", taigi teisinti juos čia išnaujo nematom reikalo.

Kaune
16 Lapkričio 1921 m.

Naujos trigonometriškos sistemos.

I.

Kaip yra žinoma, mūsų paprastoji tiesialinijinė trigonometrija užsiima tyrinėjimu šešių pamatinių trigonometriškųjų funkcijų sin, cos, tg, cotg, sec, cosec. Šios funkcijos geometriškai nustatoma tam tikru trigonometriškų linijų[1]) santykiavimu vienų su kitomis ir su ratilo stipinu $\varrho = 1$.

Be to dvi iš minėtųjų linijų — sinas ir tangensas — turi dar tą bendrą ypatybę[2]) kad jiedvi su vienu kuriuo duotojo kampo šonu sudaro visada kampą φ lygų $\frac{\pi}{2}$.

Kaip yra žinoma, sąryšis tarp paminėtųjų šesių trigonometriškųjų linijų nustatoma šiomis pamatinėmis lygybėmis:

$$(1)\ldots \begin{cases} \sin = \frac{s}{\rho};\ tg = \frac{t}{\rho} = \frac{s}{c};\ sec = \frac{z}{\rho} = \frac{\rho}{c}; \\ \cos = \frac{c}{\rho};\ cotg = \frac{k}{\rho} = \frac{c}{s};\ cosec = \frac{q}{\rho} = \frac{\rho}{s}, \end{cases}$$

kame *s*, *t*, *z* reiškia trigonometriškų linijų sino, tangenso ir sekanso, o, *c*, *k*, *q* – kosino, kotangenso ir kosekanso dydžius.

Imant lygybėse (1) $\varrho = 1$, galima minėtąsias trigonometriškas funkcijas išreikšti tiesiog raidėmis s, t, z, c, k, q.

Priskyrus prie tų šešių besikeičiančiųjų dydžių du neperskiriamai su jais surištu nekintamu dydžiu ϱ ir φ, gausime tūlą sankuopą, sudarančią tam tikrą trigonometrišką aštuonių pilnai nustatytų trigonometriškų dydžių grupę:

$$(2)\ldots G\ (s, t, z, c, k, q, \varrho, \varphi)$$

1) Sino, kosino, tangenso, kotangenso, sekanso ir kosekanso.
2) Sankampyje tokią pat ypatybę turi kosinas ir kotangensas.

Ypatingą šioje grupėje rolę vaidina du jos nesikeičiančiuoju dydžiu $\varrho = 1$ ir $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jiedu nustato visą jos vidujį sutvarkymą ir būdą. Deliai to mes tolesniame dėstyme vietoj reiškinio (2) vartosime kitą prastesnį simbolį:

$$(3) \ldots G_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\rho = 1}.$$

Gilindamies į šios grupės sutvarkymą, patėmysime joje įvairių įvairiausių santykiavimų ne vien tarp atskirų jos elementų, skyrium imamųjų, bet ir tarp įvairių jų dėstymų grupėmis.

Tų visų santykiavimų visuma sudaro mūsų nūn vartojamosios trigonometrijos, kaipo mokslo, turinį, t. y. gamina tai, ką mes tolesniame dėstyme vadinsime paprastąja trigonometrijos sistema, žymėdami ją simboliu $S_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\rho = 1}$ analogišku grupės $G_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\rho = 1}$ simboliui.

Tasai žymėjimas, kaip žemiau pamatysime, yra dideliai patogus, nes netik patį dalyką tinkamai išreiškia, bet dar ir veste veda prie tolesnių išvadų.

Pirmiausia iš to žymėjimo jau savaime aišku, kad grupė $G_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\rho = 1}$, yra ne kas kita, kaip tik vienas kitòs bendresnės grupės

$$(4) \ldots G_{\varphi = a}^{\rho = r}$$

žygis.

Ištikrųjų niekas nekliūdo davinėti grupėje $G_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\rho = 1}$ jos nekintamiems dydžiams bet kokias reikšmes, skirtinas nuo 1 ir $\frac{\pi}{2}$. Tuo keliu gausime kiekvienai naujai ϱ ir φ reikšmei vis naujų trigonometriškų grupių, iš kurių pigiai galėsime išvesti kiek tinkami vis naujų joms atitinkančių trigonometriškų sistemų.

Aplamai visos tos sistemos bus panašios į nūn vartojamąją $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, bet atskiruose dalykuose jos toli gražu nebus identiškos šiai pastarąjai.

Taigi, kad naujos trigonometriškos sistemos teoretiškai yra galimos, tuo negalima nei kiek abejoti. Lieka tik faktiškai parodyti naujòs, nuo lig šiol vartojamosios skirtinòs, sistemos pavyzdys.

Tam tikslui grįžkime prie grupės (4). Atatinkanti jai trigonometriškoji sistema bus $S^{\rho=r}_{\varphi=\alpha}$. Teesie joje r = 1, o $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Sistema $S^{\rho=r}_{\varphi=\alpha}$ virs tuomet $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$.

Lyginant šią naują trigonometrišką sistemą su lig šiol vartojamąja $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, galima pigiai patėmyti, kad tarp jų esama trejopo panašumo:

1) abiejose jose ratilo stipinas bus tas pats visiems kampams;

2) abiejose jose pamatiniai trigonometriškųjų linijų santykiavimai bus beveik tokie pat, taip kad perėjimas nuo $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ prie $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ trigonometriškų linijų santykiavimuose, išreikštuose lygybėmis (1), mažką teperkeis;

3) abiejose jose sinų ir tangensų[1]) linijos turės vieną griežtai nustatytą krypsnį φ, tuo tik skirtumu, kad sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ jis sudarys statkampį, o sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ — kampą 120 gradų didumo.

---

[1]) Pavadinimas tangensų sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ nevisai teisingas, nes tos linijos čia jau ne lies, bet perkirs ratilą stipino $\rho=1$. Tačiau remdamies analogija su nūn vartojamąja sistema, linijas nubrėžtąsias iš punkto persikirtimo kampo šono su ratilu, paraleliai palinkusiems sinams, vadinsime tangensais.

Šiaipjau žiūrint, tasai skirtumas neatrodo taip didelis. Bet ištikrųjų jis turi nemenkos įtakos į visą sistemą $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$ jos sukomplikavimo žvilgsniu.

Kad bent kiek suvoktumėm šio sukomplikavimo bei painumo laipsnį ir pačios naujos sistemos būdą, sulyginsime čia bent keletą vienokių, visiškai viena antrai atatinkančių formulų, paimtų iš vienos ir antros sistemos. Pradėsime nuo pamatinių sąryšių tarp sino ir kosino, tangenso ir sekanso. Kaip yra žinoma, nūn vartojamoj sistemoj tie sąryšiai išreiškiama lygybėmis:

$$(5) \ldots \begin{cases} \sin^2 + \cos^2 = 1 \\ \sec^2 - \mathrm{tg}^2 = 1 \end{cases}$$

Sistemoje $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$ jiems atitiks lygybės:

$$(6) \ldots \begin{cases} s^2 + c^2 = 1 + sc \\ z^2 - t^2 = 1 - t \end{cases},$$

identiškos lyg. (5) pirmoje jų dalyje, bet sukomplikuotos tam tikrų narių atsiradimu – antrojoje.

Toliaus, kaip žinome, nūn vartojamoje sistemoje, vienos trigonometriškos funkcijos galima pakeisti kitomis. Tasai galimumas yra nustatytas šiomis formulomis:

$$(7) \ldots \begin{cases} \sin = \pm\sqrt{1-\cos^2} = \dfrac{\mathrm{tg}}{\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2+1}} = \ldots \\ \cos = \pm\sqrt{1-\sin^2} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2+1}} = \ldots \\ \mathrm{tg} = \dfrac{\sin}{\pm\sqrt{1-\sin^2}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2}}{\cos} = \ldots \end{cases}$$

To funkcijų persikeitimo esama ir naujoje sistemoje $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$, bet čia jis yra išreiškiamas kur-kas painesnėmis formulomis, būtent

$$(8) \ldots \begin{cases} s = \dfrac{c \pm \sqrt{4-3c^2}}{2} = \dfrac{t}{\pm\sqrt{t^2-t+1}} = \ldots \\ c = \dfrac{s \pm \sqrt{4-3s^2}}{2} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{t^2-t+1}} = \ldots \\ t = \dfrac{2s}{s \pm \sqrt{4-3s^2}} = \dfrac{c \pm \sqrt{4-3c^2}}{2c} = \ldots \end{cases}$$

Lygindami formulas (7) ir (8), matome, kad tarp jų nėra ne tiktai tapatybės, bet maž tėra net ir panašumo. Panorėjus, galima taipgi žinomoms nūn vartojamosios sistemos formuloms:

$$\sin(\alpha \pm \omega) = \sin\alpha \cos\omega \pm \cos\alpha \sin\omega$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

surasti atitinkantieji joms santykiai sistemoje $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$.

Jie turės šią išvaizdą:

$$(9)\ldots \begin{cases} s_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{s_\alpha c_\alpha (1 + c^2_\omega - s^2_\omega) \pm c_\omega s_\omega (1 + c^2_\alpha - s^2_\alpha)}{2c_\alpha} \\ s_{2\alpha} = \dfrac{s_\alpha (1 + c^2_\alpha - s^2_\alpha)}{c_\alpha} \end{cases}$$

kame $s_{(\alpha\pm\omega)}$, $s_{2\alpha}$, s_α, s_ω reiškia kampų $\alpha \pm \omega$, 2α, α, ω sinus, o c_α, c_ω kampų α, ω kosinus.

Analogiškos formulos kosinams ir tangensams toje pat sistemoje išreikšti taip yra sukomplikuotos ir painios, kad jos čia dėti būtų visai nereikalingas darbas. Sistema $S_{\varphi=\frac{2}{3}\pi}^{\rho=1}$ jau ganėtinai yra apibūdinta formulomis (6), (8) ir (9).

Žiūrint atidžiaus į šiąs formulas, savaime skverbiasi tūlas nustėbimas: delko prie beveik vienokių pamatinių tarp trigonometriškų linijų santykiavimų, nustatytųjų lygybėmis (1), tolimesnieji tų pačių linijų santykiavimai abiejose sistemose pasirodo beesą dideliai nevienoki. Iš kur čia tas skirtumas? Į šį klausimą pigu atsakyti.

Dalykas tame, jog nežiūrint to, kad pamatiniai trigonometriškų linijų santykiavimai sistemoj $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$ ir yra beveik tokie pat, kaip ir tų pačių linijų santykiavimai (1) sistemoj $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=1}$, bet užtai pirmoje iš jų, deliai palinkimo sinų ir tangensų, sudarančių nuolatinį kampą 120 gradų didumo, trigonometriškų linijų dydžiai bus toli

gražu ne tie pat, kaip paprastoje nūn vartojamoji, sistemoje. Pavyzdžiui tarp bet kokio kampo α sino sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{3}}$ ir tokio pat kampo sino sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ bus sąryšys išreiškiamas lyginiu:

$$(10) \ldots s_\alpha = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}}$$

Turėdami omenėje, kad $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, iš lyginio (10) tiesiog matome, kad sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ išskyrus ribinius kampus 0 ir 2π, kitų kampų sinai, aplamai sakant, bus didesni, nekaip atitinkantieji jiems tų pačių kampų sinai nūn vartojamoje sistemoje, o kampai ribose tarp $\frac{\pi}{6}$ ir $\frac{5\pi}{6}$ turės šioj naujoj sistemoj sinus net didesnius kaip vienetas, ko, kaip žinome, nūn vartojamoje sistemoje niekuomet neesti.

Be to žymų sukomplikavimą sistemon $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$ įveda jos trigonometriškų linijų dvejopumas. Jis pigu išaiškinti sinų ir tangensų krypsniu: nūn vartojamoje sistemoje šis krypsnis sudaro statkampį, todel čia kiekviename kampe tegalima nubrėžti tiktai po vieną siną ir tangensą, o sistemoje $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$, deliai sinų ir tangensų palinkimo kampu 120^0, galima nubrėžti kiekviename kampe po du sinu ir tangensu.

Tų gi dviejų linijų dvejopumas savo žaru gamina ir visų toj pat sistemoj kitų linijų dvejopumą.

Tuo būdu faktas, kad esama naujos trigonometriškos sistemos $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$, skirtinos nuo paprastos nūn vartojamosios $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ reikia pripažinti tikru ir galutinai mokslo nustatytu. Abejojimams čia nebėra vietos.

2

Maža to: kiekvienam matematikui, ištyrusiam naują sistemą $S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$ daros dar savaime aišku, jog naujų trigonometriškų sistemų įvairumas tuo vienu faktu toli gražu dar nėra išsemtas. Nes šale sistemos $S_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\rho=1}$ lengva įsivaizdinti ištisa kitų panašių sistemų nesibaigiamoji eilė:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\rho=1},\ S_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\rho=2},\ S_{\varphi=\frac{\pi}{5}}^{\rho=3},\ S_{\varphi=\frac{5\pi}{6}}^{\rho=\frac{4}{5}}\ \text{ir t.t.}$$

Visos jos, kad ir vienarūšės, kaipo atskiri vienos bendresnės sistemos $S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$ žygiai, tačiau jos toli gražu nėra identiškos. Kaip jau aukščiau esame nurodę, sistemos $S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$ didžioji ypatybė yra ta, kad ratilo stipinas ϱ, būdamas joje tas pats visiems kampams, gali turėti bet kokį suskaitomą dydį r; sinų gi ir tangensų krypsnis φ, pasilikdamas irgi nekintąs ir tas pats visiems kampams, gali būti išreikštas bet kokiu kampu α.

Tuo būdu šitoje sistemoje bet kokio kampo β sankampis bus jau ne be $\frac{\pi}{2} - \beta$, bet $\alpha - \beta$.

Pagalios, kad sistema $S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$ ir visos iš jos išvedamosios nevirstų menamomis (nerealėmis) ir nenustatomomis, reikia, kad dydžiai r ir α atitiktų sąlygoms:

$$(11)\ \ldots \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \alpha < 2m\pi \end{cases}$$

kame m reiškia bet kokį neskaidytą pozityvų skaičių; kitaip sakant r ir α turi čia pasilikti nurodytose (11) nelygumų ribose, niekuomet jų nepasiekdamu, nes tų sąlygų nesilaikant, sistemos taptų nenustatomos (indéfinis).

II.

Ligšiol mes turėjome omenėje šešias trigonometriškas funkcijas, santykiuojančias su dviem nekintamais

dydžiais ϱ ir φ. Bet savaime yra aišku, jog grupė (2) visuomet bus pilnai nustatoma, jei vietoj ϱ arba φ paversime nekintamu dydžiu vieną iš likusiųjų tos grupės šešių kintamųjų dydžių. Todel, darant grupėje (2) vietoj ϱ paeiliui po vieną iš jų nekintamuoju dydžiu, lengvai gausime šešias naujas trigonometriškas grupes:

$$(12)\ldots\left\{\begin{array}{l} G\,{}^{s=a}_{\varphi=a},\ G\,{}^{t=a}_{\varphi=a},\ G\,{}^{z=a}_{\varphi=a}, \\ G\,{}^{c=a}_{\varphi=a},\ G\,{}^{k=a}_{\varphi=a},\ G\,{}^{q=a}_{\varphi=a}. \end{array}\right.$$

Grupėje $G\,{}^{s=a}_{\varphi=a}$ be nekintamojo sinų ir tangensų krypsnio, išreiškiamojo kampu, turinčiu nuolatinį dydį a, prileidžiama taipogi ir sino liniją esant nekintamą. Trigonometriškoje sistemoje $S\,{}^{s=a}_{\varphi=a}$, kuri atitinka šiai grupei, visi kampai turės vieną ir tą patį siną, lygų a.

Panašiu būdu sistemoje $S\,{}^{t=a}_{\varphi=a}$, atitinkančioje antrai iš grupių (12), visi kampai turės vienokį tangensą, lygų a ir t.t.

Savaime yra aišku, kad visose tose grupėsė (12) stipinas ϱ taps kintamuoju dydžiu, kiekvienam kampui kitokiu ir, lygiai su kitomis trigonometriškomis funkcijomis, taps prigulmingu nuo kampo didumo[1]).

Aukščiau pažymėtosios grupės (12) yra išvestos iš pamatinės $G\,{}^{\rho=r}_{\varphi=a}$ pakeičiant joje stipiną $\varrho = r$ viena iš šešių trigonometriškų linijų s, t, z, c, k, q. Visose tose naujose grupėse sinų ir tangensų krypsnis φ buvo nekintamas.

Bet ši sąlyga nėra būtinai reikalinga, kad trigonometriškos grupės ir atitinkančios joms sistemos taptų realėmis ir pilnai nustatomomis. Naujos trigonometriškos grupės galima sudaryti net ir tame atvejyje, kuomet φ padaroma kintamuoju dydžiu.

---

[1]) Žiūr. žemiau 2 ir 3 brėž.

Tam tikslui užtenka, paliekant ϱ nekintamuoju ir lygiu r, padaryti vietoj φ nekintamais taipgi po vieną iš šešių trigonometriškų linijų s, t, z, c, k, q.

Tuo keliu vėl gausime šešias naujas trigonometriškas grupes:

$$(13) \ldots \begin{cases} G_{s=a}^{\rho=r}, G_{t=a}^{\rho=r}, G_{z=a}^{\rho=r}, \\ G_{c=a}^{\rho=r}, G_{k=a}^{\rho=r}, G_{q=a}^{\rho=r}. \end{cases}$$

Sistemoje $S_{s=a}^{\rho=r}$, atatinkančioje pirmai iš tų grupių, be nekintamojo ϱ, visi kampai turės dar ir vienokį nekintamą siną, lygų a; sistemoje $S_{t=a}^{\rho=r}$ — vienokį tangensą ir t.t.

Suprantamas daiktas, kad tose naujose sistemose sinų ir tangensų krypsnis φ kiekvienam kampui bus kitoks, tapdamas tam tikra nauja trigonometriška funkcija[1]).

Nuodugnesnis grupių (13) tyrinėjimas parodo, kad jos sąryšyje su savo nekintamais dydžiais, gali būti arba realės ir nepertraukiamos, arba virsti pertraukiamomis ir tapti net menamomis (nerealėmis). Pavyzdžiui, jeigu išgvaldę lyginį $\sin \vartheta = a : r$ sužinosime kampo ϑ dydį, tai prie $r > a$ grupė $S_{s=a}^{\rho=r}$ bus realė ir nepertraukiama tiktai ribose nuo 0 lig ϑ, nuo $\pi - \vartheta$ lig $\pi + \vartheta$ ir nuo $2\pi - \vartheta$ lig 2π; likusioje gi dalyje nuo ϑ lig $\pi - \vartheta$ ir nuo $\pi + \vartheta$ lig $2\pi - \vartheta$ ji bus menamoji (nerealė), .y. neturės jokių trigonometriškų linijų.

Tas pat galima pasakyti ir apie grupes $G_{t=a}^{\rho=r}$ ir $G_{k=a}^{\rho=r}$. Atatinkančiuosius joms ribinius kampus ϑ' ir ϑ'' gausime iš lyginių:

$$\sin \vartheta' = \frac{a'}{r}; \sin \vartheta'' = \frac{r}{a''},$$

kame a', a'' reiškia nekintančiuosius dydžius t ir k paminėtose dviejose grupėse prie sąlygos $r > a'$ ir $r < a''$.

[1]) Žiūr. žemiau 7 brėž.

Be to reikia pažymėti, kad bet koks kampas sistemoje $S^{\rho=r}_{s=a}$, atatinkančioje grupei $G^{\rho=r}_{s=a}$, jos realumo ribose, turės dvejopas trigonometriškas linijas, kurios, pasiekę tas ribas, virs pavienėmis, o už tų ribų, taps menamomis (nerealėmis).

III.

Ligšiol mes nagrinėjome trigonometriškas grupes, kuriose be penkių kokių trigonometriškų linijų buvo kintamuoju dar vienas iš dviejų dydžiu, būtent arba ϱ, kaip grupėse (12), arba φ, kaip grupėse (13). Dabar prileiskim, kad jiedu abudu susyk virsta kintamaisiais. Prie šios sąlygos, vartodami priimtąjį žymėjimą, gausime teoretiškai šią trisdešimts naujų grupių eilę:

$$(14). . . \begin{cases} G^{s=a}_{t=b}, G^{s=a}_{z=b}, G^{s=a}_{c=b}, G^{s=a}_{k=b}, G^{s=a}_{q=b}, \\ G^{t=a}_{s=b}, G^{t=a}_{z=b}, G^{t=a}_{c=b}, G^{t=a}_{k=b}, G^{t=a}_{q=b}, \\ G^{z=a}_{s=b}, G^{z=a}_{t=b}, G^{z=a}_{c=b}, G^{z=a}_{k=b}, G^{z=a}_{q=b}, \\ G^{c=a}_{s=b}, G^{c=a}_{t=b}, G^{c=a}_{z=b}, G^{c=a}_{k=b}, G^{c=a}_{q=b}, \\ G^{k=a}_{s=b}, G^{k=a}_{t=b}, G^{k=a}_{z=b}, G^{k=a}_{c=b}, G^{k=a}_{q=b}, \\ G^{q=a}_{s=b}, G^{q=a}_{t=b}, G^{q=a}_{z=b}, G^{q=a}_{c=b}, G^{q=a}_{k=b}, \end{cases}$$

Sulyginę grupes $G^{s=a}_{t=b}$ ir $G^{t=a}_{s=b}$, matome, kad jos yra vienarūšės, nes abi turi sinus ir tangensus lygius nekintamiems dydžiams. Skirtumas tarp jų tik tas, kad grupėje $G^{s=a}_{t=b}$ sinai yra lygūs a, o tangensai $= b$, o grupėje $G^{t=a}_{s=b}$ sinai yra lygūs b, o tangensai $= a$.

Tą pat galime pasakyti ir apie grupes $G^{s=a}_{z=b}$ ir $G^{z=a}_{s=b}$; $G^{s=a}_{c=b}$ ir $G^{c=a}_{s=b}$; $G^{s=a}_{k=b}$ ir $G^{k=a}_{s=b}$ ir t. t.

Tuo būdu iš tų 30 grupių (14) gausime tik 15 įvairiarūšių:

$$(15)\ldots\left\{\begin{array}{lllll} G_{t=b,}^{s=a} & G_{z=b,}^{s=a} & G_{c=b,}^{s=a} & G_{k=b,}^{s=a} & G_{q=b}^{s=a} \\ G_{z=b,}^{t=a} & G_{c=b,}^{t=a} & G_{k=b,}^{t=a} & G_{q=b,}^{t=a} & G_{c=b}^{z=a} \\ G_{k=b,}^{z=a} & G_{q=b,}^{z=a} & G_{k=b,}^{c=a} & G_{q=b,}^{c=a} & G_{q=b}^{k=a} \end{array}\right.$$

Priskyrus prie šių pastarųjų grupių (15) aukščiau minėtąsias (13) ir (14), o taipgi pamatinę grupę (4), gausime galų-gale 28 įvairias trigonometriskas grupes, kurioms rasis tiek pat atatinkančiųjų trigonometriškų sistemų[1]. Beto turime pridurti, kad kiekviena iš tų 28 sistemų galima be galo įvairinti, duodant begalinį reikšmių skaičių dviem jos nekintamiem dydžiam.

IV.

Aukščiau nurodytieji kiekvienos iš 28 mūsų atrastųjų trigonometriškų grupių sąvokojimai matematiškai yra griežti ir negali žadinti jokių abejojimų: išrinkti nekintamieji dydžiai ganėtinai apibūdina kiekvieną grupę ir leidžia atskirti vieną nuo kitos. Tą pat galima pasakyti ir apie 28 naujas trigonometriškas sistemas, atatinkančias toms 28 naujoms grupėms. Visos jos yra moksliškai nustatytos, bent aplamais bruožais; panorėjus galima jos ir detaliai išgvildenti. Jau pats aukščiau įvestasai simboliškas jų žymėjimas ganėtinai apibūdina kiekvieną sistemą ir padeda atskirti vieną nuo kitos.

Tačiau, kad tasai jų skirtumas taptų skaitytojui aiškesnis ir vaizdingesnis, pamėginsime paaiškinti dalyką dar kaikuriais išvadžiojimais, imtais iš analitiškos geometrijos.

[1]) Kadangi kiekviena trigonometriška sistema savaime reiškia vieną iš 8 elementų po 6 kombinavimo žygių, tatai elementarių trigonometriškų sistemų turi būti nedaugiau ir nemažiau kaip 28. Tai savaime plaukia iš kombinavimo be pakartojimų formulos:

$$C_n^{(k)} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2\ \ldots\ (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

Tam tikslui įsivaizdinkim sau dvi trigonometriski liniji siną SN ir tangensą TG. Punktai N ir G tebūnie ratilo stipine (žiūr. 2 ir 3 brėž.) Ieškokime analitiško geometriškų punktų S ir T vietų reiškinio pasigaudami paprastų dekartinių koordinatų. Naudodamies pamatinėmis lygybėmis (1), lengvai gausime eilę porinių lyginių, iš kurių pirmasis bus geometriskos punktų S vietos lyginys, o antrasis — geometriskos punktų T vietos. Štai tie lyginiai kiekvienai iš 28 mūsų atrastųjų trigonometriškų sistemų:

$$1.\ S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=r}\ ^{1)}$$

$$(16)\ldots \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2\ ^{2)} \\ x = r, \end{cases}$$

kurie nūn vartojamoje sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=1}$ turės išvaizdą:

$$(17)\ldots \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$2.\ S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=a}$$

$$(18)\ldots \begin{cases} y = a\ ^{3)} \\ y = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{cases}$$

---

[1]) Parankesniam sulyginimui su nūn vartojamąja sistema, imsime vieton pirmųjų septynių aplamų sistemų:
$S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$, $S_{\varphi=\alpha}^{s=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{t=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{z=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{c=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{k=a}$, $S_{\varphi=\alpha}^{q=a}$, jų dalinius žygius: $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=r}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{z=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{q=a}$.

[2]) Lyginiai (16) sistemoje $S_{\varphi=\alpha}^{\rho=r}$ turės šią išvaizdą:

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$x = r + y \operatorname{cotg} \alpha$$

[3]) Aplamoje sistemoje $S_{\varphi=\alpha}^{s=a}$ šie lyginiai atrodys šiaip:

$$y = a \sin \alpha$$
$$y\,(x - y \operatorname{cotg} \alpha) = a \sin \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3.\quad S^{\,t=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$(19)\ldots\quad \begin{cases} ax = y\sqrt{x^2+y^2} \\ y = a \end{cases}$$ [1]

$$4.\quad S^{\,z=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$(20)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = x\,(a-x) \\ y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$ [2]

$$5.\quad S^{\,c=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$(21)\ldots\quad \begin{cases} x = a \\ y = \frac{x}{a}\sqrt{x^2-a^2} \end{cases}$$ [3]

$$6.\quad S^{\,k=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$(22)\ldots\quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ y = \frac{x^2}{a} \end{cases}$$ [4]

$$7.\quad S^{\,q=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

---

[1] Sistemoje $S^{\,t=a}_{\varphi=\alpha}$ lyginiai (19) virs šiais:

$$a\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = y\sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = a\sin\alpha$$

[2] Sistemoje $S^{\,z=a}_{\varphi=\alpha}$ lyginiai (20) įgaus išvaizdą:

$$y\operatorname{cotg}\alpha = x - \frac{x^2+y^2}{a}$$
$$y^2 = a^2 - x^2$$

[3] Sistemoje $S^{\,c=a}_{\varphi=\alpha}$ lyginiai (21) įgaus išvaizdą:

$$x = a + y\operatorname{cotg}\alpha$$
$$y\operatorname{cotg}\alpha = x - \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}$$

[4] Sistemoje $S^{\,k=a}_{\varphi=\alpha}$ lyginiams (22) atitiks šie:

$$y\operatorname{cotg}\alpha = x - \frac{ay\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$y\operatorname{cotg}\alpha = x - \sqrt{ay\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$(23)\ldots\quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2 + y^2}{a} \quad {}^{1)} \\ y = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{cases}$$

8. $S\,{}^{\rho = r}_{s = a}$

$$(24)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ \dfrac{r}{a} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{y^2 + (x-r)^2}} \end{cases}$$

9. $S\,{}^{\rho = r}_{t = a}$

$$(25)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ y^2 = a^2 - (x - r)^2 \end{cases}$$

10. $S\,{}^{\rho = r}_{z = a}$

$$(26)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

11. $S\,{}^{\rho = r}_{c = a}$

$$(27)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ y^2 = \dfrac{r^4}{a^2} - x^2 \end{cases}$$

12. $S\,{}^{\rho = r}_{k = a}$

$$(28)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ y^2 = \dfrac{r^4}{a^2} - (x - r^2) \end{cases}$$

13. $S\,{}^{\rho = r}_{q = a}$

$$(29)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = r^2 - x^2 \\ \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{r^2 + y^2}}{\sqrt{y^2 + (x-r)^2}} \end{cases}$$

14. $S\,{}^{s = a}_{t = b}$

$$(30)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{a}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \\ y^2 = b^2 - \left(x - \dfrac{a}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \end{cases}$$

---

[1]) Sistemoje $S\,{}^{q = a}_{\varphi = \alpha}$ lyginiai (23) turės išvaizdą:

$$y = \frac{x^2 + y^2}{a \operatorname{cosec} \alpha}$$

$$y \operatorname{cotg} \alpha = x - \frac{ay \operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$15.\quad S_{z=b}^{s=a}$$

$$(31)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 \\ y^2 = b^2 - x^2 \end{cases}$$

$$16.\quad S_{c=b}^{s=a}$$

$$(32)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = a^2 - (x-b)^2 \\ y^2 = \dfrac{a^2}{b}\sqrt{x^2+y^2} - \left(x - \sqrt{b\sqrt{x^2+y^3}}\right)^2 \end{cases}$$

$$17.\quad S_{k=b}^{s=a}$$

$$(33)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{ab}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \\ y^2 = \dfrac{a}{b^3}\sqrt[3]{ab\,(x^2+y^2)^2} - \left(x - \sqrt[3]{b\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$18.\quad S_{q=b}^{s=a}$$

$$(34)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = ab - x^2 \\ y^2 = \dfrac{a}{b}(x^2+y^2) - (x - \sqrt{ab})^2 \end{cases}$$

$$19.\quad S_{z=b}^{t=a}$$

$$(35)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(x^2+y^2) - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 \\ y^2 = b^2 - x^2 \end{cases}$$

$$20.\quad S_{c=b}^{t=a}$$

$$(36)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2 b^2}{x^2+y^2} - (x-b)^2 \\ y^2 = a^2 - \left(x - \sqrt{b\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$21.\quad S_{k=b}^{t=a}$$

$$(37)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = ab - y^2 \\ y^2 = a^2 - (x - \sqrt{ab})^2 \end{cases}$$

$$22.\quad S_{q=b}^{t=a}$$

$$(38)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \left(\dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \dfrac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{ab}\right)^2 \\ y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{ab}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$23.\quad S\,{}^{z=a}_{c=b}$$

$$(39)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = ab - x^2 \\ y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

$$24.\quad S\,{}^{z=a}_{k=b}$$

$$(40)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \frac{(x^2+y^2)^3}{a^2b^2} - \left(x - \frac{x^2+y^2}{a}\right)^2 \\ y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

$$25.\quad S\,{}^{z=a}_{q=b}$$

$$(41)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{x^2+y^2}{a}\right)^2 \\ y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

$$26.\quad S\,{}^{c=a}_{k=b}$$

$$(42)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2) - (x-a)^2 \\ y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2) - \left(x - \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$27.\quad S\,{}^{c=a}_{q=b}$$

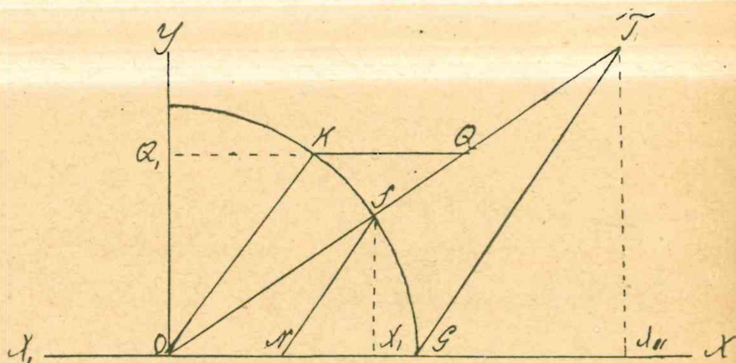
$$(43)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - (x-a)^2 \\ y^2 = \frac{a(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{b^2} - \left(x - \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$28.\quad S\,{}^{k=a}_{q=b}$$

$$(44)\ldots\quad \begin{cases} y^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \\ y^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \end{cases}$$

Kad parodžius tų visų lyginių gavimo būdą, išdėsime čia dviejų pastarųjų (44) išvedimą. Tam tikslui teesie bet koks kampas α. Viršutiniame jo šone pažymėkime punktą Q taip, kad OQ = b. Iš to punkto išveskime tiesiąją Q,Q, paralelę ašiai OX ir pažymėkime toje tiesioje punktą K tokį, kad būtų KQ = a. Sujunkime punktą K su O ir stipinu OK nubrėžkime lanką KSG, kurs duotojo kampo šonus perkirs punktuose S ir G. Iš tų punktų nutieskime tiesiąsias SN ir TG paraleles OK,

Šis brėžimas duos mums geometriškąjį vaizdą trigonometriškos sistemos $S_{q=b}^{k=a}$, turinčios visiems kampams vienokį nekintamą kotangensą lygų *a* ir vienokį



1 brėž.

kosekansą lygų *b*. Linija SN bus toje sistemoje duotojo kampo sinas, ON — jo kosinas, TG — tangensas, OT — sekansas, OQ — kosekansas = b, KQ — kotangensas = a, OK = OS = OG — stipinas ϱ, kiekvienam kampui kitoks. Aišku, jog punktai S ir T kiekviename kampe keis savo vietas; jų sankuopa sudarys geometriškąsias punktų S ir T vietas. Tai bus tam tikros kreivosios, kurių lyginiai mums reikia nūn surasti.

Tam tikslui iš punktų S ir T nuleiskime perpendikulerus $SX_{,}$ ir $TX_{,,}$ į ašį OX. Geometriškosios punktų S vietos lyginį gausime iš stattrikampio $SNX_{,}$; jis turės išvaizdą:

$$(45) \ldots \quad SX_{,}^2 = SN^2 - (OX_{,} - ON)^2$$

Kadangi SN yra duotojo kampo sinas *s*, ON — jo kosinas *c*, $OX_{,}$ – punkto S abscisa *x*, $SX_{,}$ jo ordinata *y*, tai lyginys (45) galima išreikšti šitaip:

$$(46) \ldots \quad y^2 = s^2 - (x - c)^2$$

Nūn belieka lyginyje (46) dydžiai *s* ir *c* pakeisti reiškiniais sudarytais iš nekintamųjų sistemos dydžių *a* ir *b* ir punkto S koordinatų *x* ir *y*. Tam tikslui

pažvelkime į lygybes (1). Iš jų betarpiškai gaunome:

$$(47)\ldots\ q = \frac{\rho^2}{s} = b;\ k = \frac{\rho c}{s} = a$$

Bet iš 1 brėž. matome, kad $OS^2 = \varrho^2 = x^2 + y^2$, iš kur $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Įstatę tą dydį į (47), gausime:

$$s = \frac{x^2 + y^2}{b};\ c = \frac{a(x^2 + y^2)}{b\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Įnešę tuodu dydžiu į lyginį (46), gausime ieskomąjį geometriškosios punktų S vietos lyginį:

$$y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

Panašiu būdu geometriškosios punktų T vietos lyginys lengvai yra gaunamas iš stattrikampio $TGX_{,,}$. Tas lyginys bus šitoks:

$$(48)\ldots\ TX_{,,}^2 = TG^2 - (OX_{,,} - OG)^2$$

Kadangi TG yra kampo α tangensas t, OG — jo stipinas ϱ, $OX_{,,}$ — punkto T abscisa x, $TX_{,,}$ — jo ordinato y, todel lyginiui (48) galima duoti ši išvaizda:

$$(49)\ldots\ y^2 = t^2 - (x - \varrho)^2$$

Lieka t ir ϱ išreikšti nekintamais sistemos dydžiais a ir b ir geometriškos punktų T vietos koordinatomis x ir y.

Tam tikslui vėl kreipkimes į pamatines lygybes (1). Naudodamies pažymėtais ten trigonometriškų linijų santykiavimais, rasime:

$$(50)\ldots\ \frac{q}{k} = \frac{b}{a} = \frac{\rho^2}{s} : \frac{\rho c}{s} = \frac{z}{\rho}$$

Bet iš 1 brėz. matome, kad $OT = z = \sqrt{x^2 + y^2}$; todel iš (50) gausime:

$$(51)\ldots\ \rho = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Iš kitos šalies remdamies lygybėmis (1) turime:

$$tk = ta = \varrho^2,\ \text{iškur}\ t = \frac{\rho^2}{a}.$$

Čia pakeitus ϱ^2 reiškiniu iš (51) gausime:

$$(52)\ldots\ t = \frac{a}{b^2}(x^2 + y^2).$$

Galop įnešdami lyginin (49) vieton t ir ϱ atatinkančius jiemdviem iš (51) ir (52) reiškinius, gausime ieškomąjį geometriškos punktų T vietos lyginį:

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2.$$

Panašiu būdu gaunama ir kiti lyginiai nuo (30) lig (44). Jiems išvesti piešiama geometriškasai duotos sistemos vaizdas, iš jo išvedama lyginiai analogiški lyginiams (46) ir (49), pagalios įeinantieji juosna trigonometriški dydžiai *s* ir *c*, *t* ir ϱ pakeičiama atatinkančiais jiems reiškiniais, sudarytais iš kintamųjų punktų S ir T koordinatų x, y ir apibūdinančiųjų duotąją sistemą nekintamų dydžių a ir b arba a ir r.

Išimtį sudaro vien punktų T vietos lyginiai (24) ir (29); jų išvedimui prisiėjo kreiptis į tam tikrų trikampių panašumą. Likusieji lyginiai nuo (16) lig (30) gauta dar lengviau iš geometriško duotosios sistemos vaizdo ir lygybių (1).

V.

Aukščiau gautieji lyginiai nuo (16) lig (44) nurodo, kad geometriškos punktų S ir T vietos kiekvienoje iš 28 elementarių sistemų yra išreiškiamos labai įvairiai, nes sudaro tai tiesiąsias linijas, tai antrojo laipsnio kreivąsias (ratilus, elipses, hiperboles, paraboles), tai galop aukštesniųjų laipsnių kreivąsias („kryžines", linijas „kappa" ir k).

Peržiūrinėjant visą nuo (16) lig (44) lyginių eilę, pigu pamatyti, kad lyginiai (17):

$$y^2 = 1 - x^2$$
$$x = 1,$$

atatinkantieji visuotinai nūn vartojamąjai sistemai, yra prasčiausi bei mažiau sukomplikuoti, kaip visi kiti. Šis faktas yra neužginčijamai aiškus. Deja, to pat negalima pasakyti apie jo priežastį. Ištikrųju — į klausimą, delko lyginiai (17) yra visųprasčiausi, rodos, naturaliausia

būtų atsakius šiuo prileidimu: lyginiai (17) delto yr' prasčiausi, kad atatinkančioji jiems nūn vartojamoji sistema $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ yra esmingai visųprasčiausia. Iš čia savaime skverbiasi išvada, jog geometriškųjų punktų S ir T vietų lyginių prastumas yra betarpiškame sąryšyje su atitinkančiųjų jiems trigonometriškų sistemų prastumu. Tuo būdu aukščiau minėtasai prileidimas lengvai gali virsti šiuo griežtu tvirtinimu: juo trigonometriška sistema yr prastesnė, juo prastesni bus ir atatinkantieji jai punktų S ir T vietų lyginiai ir atvirsčiai. Bet ar šis tvirtinimas turi matematiško griežtumo ir ar jis atitinka tikrumai, tuo nevien leistina, bet dar būtinai reikia abejoti.

Nes ištikrųjų atatinkantieji nūn vartojamąjai sistemai lyginiai (17), sulyginus juos su likusiųjų 27 sistemų lyginiais, kad ir yra visųprasčiausi, tačiau galima labai lengvai įsivaizdinti sau tokia trigonometriškoji sistema, kurioje punktų S ir T vietų lyginiai bus dar prastesni, pavyzdžiui:

$$(53)\ldots \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Atatinkančioji jiem sistema tuo skirsis nuo nūn vartojamosios, kad joje lygaus vienetui stipino ratilas bus pakeistas keturiomis persikertančiomis tiesiomis, paralelėmis statkampinėms koordinatų ašims ir gulinčiomis nuo jų pradžios atstume lygiame vienetui (žiūr. 4 brėz.). Be to čia ϱ virs keimariu, sudarydamas du dydžiu ϱ ir r, iš kurių pirmasai bus kintamas, antrasai — nekintamas.

Deliai tos priežasties apkis čia bent kiek ir kaikurie reiškiniai, išvedamieji iš lygybių (1), pav.:

$$(54)\ldots \quad z=\frac{\rho r}{c}=\frac{\rho}{c};\ t=\frac{rs}{c}=\frac{s}{c}=\frac{1}{c} \text{ ir t. t.}$$

Visi kampai turės šioje sistemoje vienokį siną lygų vienetui. Be to reiškinys $z^2 - t^2$ taipgi bus nekintąs ir lygus vienetui.

Tuo būdu mūsų surastoji nauja sistema bus ne kas kita, kaip atskiras sistemos $S^{\rho^2 - c^2 = a^2}_{z^2 - t^2 = r^2}$ žygis.

Pastaroji išvada nurodo, kad be aukščiau aprašytųjų 28 elementarių šistemų, galima sudaryti ir įvairių sukrautinių trigonometriškų sistemų, pav.:

$$(55)\ldots S^{sc = a}_{\frac{t}{k} = b},\quad S^{s + c = a}_{z + q = b} \text{ ir t. t.}$$

arba dar aplamesnių:

$$(56)\ldots S^{f(\rho, \alpha) = a}_{\varphi(s, t) = b},\quad S^{f(\rho, s, \alpha) = a}_{\varphi(t, z, c) = b} \text{ ir t. t.}$$

Jų skaičius ir įvairumas bus begalinis, lygiai kaip ir pačių funkcijų.

VI.

Gvaldant lyginius:

$$(57)\ldots \begin{cases} f(\rho, \alpha) = a,\ \varphi(s, t) = b \\ f(\rho, s, \alpha) = a,\ \varphi(t, z, c) = b \text{ ir t.t.} \end{cases}$$

kaikaida galima dvi bet koki trigonometriški funkciji sistemose (56) griežtai išreiksti pavidale f (a, b) ir φ (a, b); bet esti ir tokių atsitikimų, kuomet dviejų bet kokių trigonometriškų funkcijų analitiškiems reiškiniams negalima duoti kitas pavidalas, kaip tik f (a, b, x, y) ir φ (a, b, x, y), kame x ir y yra punktų S bei T koordinatos.

Sukrautines sistemas tipo (56), kurioms galima duoti pavidalai:

$$(58)\ldots S^{s = f(a, b)}_{t = \varphi(a, b)},\quad S^{c = f(a, b)}_{k = \varphi(a, b)} \text{ ir t. t.}$$

vadinsime virstančiomis į elementares arba pilnai išgvildomomis; sistemas gi tipo

$$(59)\ldots S^{s = f(a, b, x, y)}_{t = \varphi(a, b, x, y)},\quad S^{z = f(a, b, x, y)}_{c = \varphi(a, b, x, y)} \text{ ir t.t.}$$

vadinsime nevirstančiomis į elementares arba nepilnai išgvildomomis.

Pilnai išgvildomųjų sistemų pavyzdžiu gali būti sistema $S^{sc = a}_{\frac{t}{k} = b}$, nes ji yra identiška sistemai:

$$(60)\ldots\quad S\begin{smallmatrix} s=f\,(a,\,b) \\ c=\varphi\,(a,\,b)\end{smallmatrix} = S\begin{smallmatrix} s=\sqrt{a\sqrt{b}} \\ c=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}\end{smallmatrix}$$ [1]

Nepilnai išgvildomųjų sistemų pavyzdžiais gali būti sistemos:

$$S\begin{smallmatrix}\rho^2-c^2=a^2 \\ z^2-t^2=b^2\end{smallmatrix},\quad S\begin{smallmatrix}s+c=a \\ z+q=b\end{smallmatrix}\ \text{ir t. t.}$$

Pirmoji iš jų galima privesti prie formos

$$S\begin{smallmatrix}\rho=f\,(a,\,x) \\ z=\varphi\,(b,\,y)\end{smallmatrix},\ \text{kame}$$

$f\,(a,x) = \sqrt{a^2+x^2}$ (x — yra čia punkto S koordinata)
$\varphi\,(b,y) = \sqrt{b^2+y^2}$ (y — yra čia punkto T koordinata); antroji, išgvaldžius abu lyginiu: $s+c=a$, $z+q=b$, prie formos

$$S\begin{smallmatrix}s=f\,(a,\,b,\,x,\,y) \\ c=\varphi\,(a,\,b,\,x,\,y)\end{smallmatrix},\ \text{kame}$$

$$(61)\ldots\quad \begin{cases} f\,(a,b,x,y)=\dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a}{b}\,(x^2+y^2)} \\ \varphi\,(a,b,x,y)=\dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a}{b}\,(x^2+y^2)} \end{cases};$$

kintamuoju x, y čia reiškia punkto S koordinati [2]).

---

[1]) Ši išvada gaunama šiuo būdu: iš lygybių (1) randame

$$\frac{t}{\rho}=\frac{s}{c}\ \text{ir}\ \frac{k}{\rho}=\frac{c}{s}$$

Padalinus pirmą reiškinį antruoju gausime:

$$\frac{t}{k}=b=\frac{s^2}{c^2}$$

Tuo būdu suradimui *s* ir *c* turime du lyginiu:

$$sc=a;\ \frac{s^2}{c^2}=b;$$

iš čia galutinai gauname:

$$s=\sqrt{a\sqrt{b}};\ c=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}.$$

[2]) Ši išvada gaunama šiuo būdu: iš lyginių (1) randame:

$$\frac{z}{\rho}=\frac{\rho}{c}\ \text{ir}\ \frac{q}{\rho}=\frac{\rho}{s};$$

sudėję tus du reiškiniu gausime:

$$\frac{z+q}{\rho}=\rho\left(\frac{s+c}{sc}\right),\ \text{arba:}\ \frac{b}{\rho}=\frac{\rho a}{sc};\ \text{iškur}\ sc=\frac{a}{b}\,\rho^2.$$

Kadangi $\rho^2=x^2+y^2$, tatai suradimui s ir c turime du lyginiu:

$$s+c=a\ \text{ir}\ sc=\frac{a}{b}\,(x^2+y^2)$$

iš čia galutinai gaunama aukščiau nurodytieji reiškiniai dydžiams *s* ir *c*.

Geometriškos punktų S ir T vietos toje sistemoje bus išreikštos lyginiais:

$$(62)\ldots \begin{cases} y^2 = \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a}{b}(x^2+y^2)}\,\right]^2 \\ \qquad - \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a}{b}(x^2+y^2)}\,\right]^2 \\ y^2 = \frac{a(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{b(b-\sqrt{x^2+y^2})} \\ \qquad - \left[x - \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2} - \frac{a}{b}(x^2+y^2)}\right]^2 \end{cases}$$

Privedimas sistemų (56) prie (58) arba (59) parodo, kad pilnai ir nepilnai išgvildomosios sistemos yra taipgi padalomos 28 rūšimis, kaip ir elementarės.

Į klausimą, ar yra trigonometriškų sistemų dar painesnių, nesiduodančių privesti net prie formos (59), nelengva atsakyti. Teoretiškai jos atrodo galimos. Pav. tokios transcedentės sistemos, kaip:

$$\mathrm{S}\begin{matrix} \left(\lg\frac{s}{c} + b\lg\frac{\rho}{k}\right)^{\frac{1}{2\pi}} = a \\ \left(e^{\frac{s}{\rho}} + ae^{\frac{\pi c}{k}}\right)^{\frac{1}{e}} = b \end{matrix}, \quad \mathrm{S}\begin{matrix} \sqrt{a^{\lg s} + e^{a\rho}} = b \\ \left(b^{\lg\frac{\rho}{s}} + \rho e^{t}\right)^{\pi} = a \end{matrix}$$

ir t. p.

greičiausia bus absolūčiau neišgvildomos; bet mes čia jų neliesime, nes jų tyrinėjimas perdaug mus nukreiptų į šalį nuo temos.

VII.

Ligšiol matematikoje buvo tyrinėjamos tik dvi tiesialinijini trigonometriški sistemi pamatuoti Euklido geometrija: nūn vartojamoji $\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=1}$ ir senoji Ptolomejaus $\mathrm{S}_{c=1}^{\rho=1}$ (atskiras aplamesnės sistemos $\mathrm{S}_{c=a}^{\rho=r}$ žygis). Ptolomejinė, nežiūrint jos regimo naturalumo (nes ar gali būt kas naturalesnio, kaip matavimas kampo jam atitinkančiaja styga), praktikoje, kaip, žinome, yr pasi-

rodžius gan paini ir neparanki vartoti. Šiuo žvilgsniu nūn vartojamoji žymiai prašoksta Ptolomejinę taip savo prastumu, kaip ir vartojimo parankumu.

Tačiau, jei kas paklaustų, ar nėra naujos trigonometriškos sistemos tiek prašokstančios (bent kaikuriuose atvejuose) nūn vartojamąją, kiek ši prošoksta Ptolomejinę, tai neigiamai atsakyti į šį klausimą *à priori* vargiai būtų leistina. Nes ištikrųjų, kas bedrįs tvirtinti, kad tarp begalinės daugybės sukrautinių ir 28 aukščiau išvestųjų elementarių trigonometriškų sistemų, (ypač prilyginus vienetui įeinančiuosius josna nekintamus dydžius r, a, b), neatrasime nei vienos mokslui tinkamesnės, kaip paprastoji $\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\rho=1}$? Bent kol kas mes nematome jokių moksliškų pamatavimų, kurie duotų progos manyti, kad tokios sistemos nėsama. Anaiptol — šioks toks pamatas prileisti ją esant, iš vienos šalies yra jau pats begaliniai didelio kitų įvairių trigonometriškų sistemų skaičiaus buvimas; iš kitos — pilna jų matematiška teisių lygybė; nes kad jos ir skirias viena nuo kitos ir nuo paprastosios nūn vartojamosios sistemos, tačiau, kiekvienai šios pastarosios formulai visuomet rasis jose atitinkančiųjų savų formulų.

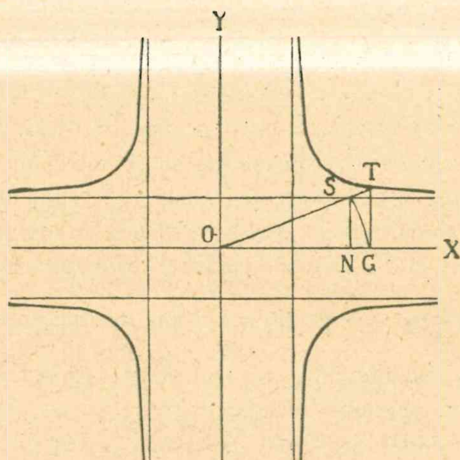
Kad aiškiau parodžius šią bendrą algoritmiškąją keičiamybę vienòs trigonometriškos sistemos formulų į kitos, mes čianuodugniau išgvildensime, kaipo pavyzdžius dvi elementari sistemi $\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$, $\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=1}$ ir dvi sukrautini

$\mathrm{S}_{z^2-t^2=g^2}^{\rho^2-c^2=d^2}$ ir $\mathrm{S}_{t\,:\,s=1}^{\rho^2-c^2=u^2}$.

VIII.

Teesie betkoks kampas SON $= a$. Sistemoje $\mathrm{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ turėsime: SN $= s_a = h$, TG $= t_a$, OT $= z_a$, ON $= c_a$,

$OS = OG = \varrho_\alpha$ (žiūr. 2 brėž.). Geometriškoji punktų T vieta sudaro kryžinę liniją. Jos lyginys buvo jau paduotas form. (18). Santykiavimai tarp nūn vartojamosios



2 brėž.

sistemos funkcijų $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, ratilo stipino $r=1$ ir atitinkančių joms s_α, c_α, t_α, z_α, ϱ_α sistemoj $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ bus šie:

$$(63)\ldots\quad \frac{\sin\alpha}{s_\alpha}=\frac{\cos\alpha}{c_\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{t_\alpha}=\frac{\sec\alpha}{z_\alpha}=\frac{1}{\rho_\alpha}\;{}^{1})$$

Lygybės (63) nurodo, kad funkcijos s_α, c_α, t_α, z_α, ϱ_α, panašiai į $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir kitas, yra periodiškos. Tas pat reikia pasakyti ir apie likusias dvi funkcijas k_α ir q_α. Visų tų naujų funkcijų kitimas kiekvienoj ratilo ketvirtyj galima matyti šioje lentelėje (64):

[1]) Aplamesnėje sistemoje $S_{\varphi=\alpha}^{s=h}$ lygybės (63) turės išvaizdą:

$$\frac{\sin\alpha}{s_\alpha}=\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{c_\alpha}=\frac{\sin\lambda}{\rho_\alpha};\quad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{t_\alpha}=\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\rho_\alpha\cos\alpha}.$$

(64). . .

α	s	c	t	k	z	q	ρ
O	h	∞	h	∞^2	∞	∞^2	∞
α	h	$c\alpha$	$t\alpha$	$k\alpha$	$z\alpha$	$q\alpha$	$\rho\alpha$
$\frac{\pi}{2}$	h	O	∞	O	∞	h	h
$\pi-\alpha$	h	$-c\alpha$	$-t\alpha$	$-k\alpha$	$-z\alpha$	$q\alpha$	$\rho\alpha$
π	h	$-\infty$	$-h$	$-\infty^2$	$-\infty$	∞^2	∞
$\pi+\alpha$	$-h$	$-c\alpha$	$t\alpha$	$k\alpha$	$-z\alpha$	$-q\alpha$	$\rho\alpha$
$\frac{3\pi}{2}$	$-h$	O	∞	O	$-\infty$	$-h$	h
$2\pi-\alpha$	$-h$	$c\alpha$	$-t\alpha$	$-k\alpha$	$z\alpha$	$-q\alpha$	$\rho\alpha$
2π	$-h$	∞	$-h$	$-\infty^2$	∞	$-\infty^2$	∞
$2\pi+\alpha$	h	$c\alpha$	$t\alpha$	$k\alpha$	$z\alpha$	$q\alpha$	$\rho\alpha$

Iš jos matome, kad sinai sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ visiems kampams [1]) lieka nekintą ir lygūs $\pm$ h, kosinai kinta nuo O lig $\pm\infty$, tangensai nuo $\pm$ h lig ∞, kotangensai nuo O lig ∞^2, sekansai nuo $+\infty$ lig $-\infty$ (minimum'o $\pm$ 2 h pasiekdami prie $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}$, kame *m* reiškia neskaidytą pozityvų skaičių), kosekansai nuo h lig $\pm\infty^2$ ir pagalios stipinai nuo h lig ∞.

Priežastys, delko kotangensų ir kosekansų, kitimo ribos toje sistemoje yra daug platesnės, kaip likusiųjų

[1]) Aukščiau paduotoje lentelėje mes neišskyrėme nei kampo = O prileisdami jame siną = h. Tai reikia suprasti taip, jog sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ kiekvienas kampas, kurs begaliniai artinas prie O, kaip prie savo ribos, turės siną nekintamą ir lygų h. Pasiekęs tą ribą, t. y. kuomet linija, OT sutaps su OX, nebebus jokio sino, delto kad tuomet turėsime ištikrųjų jau nebe kampą, bet dvi sutapusi tiesiaji. Tas pat reikėtų pasakyti ir apie kampus lygius π, 2π, ir aplamai $m\pi$, kuomet *m* yra neskaidytas skaičius.

funkcijų, lengvai galima išaiškinti pamatinėmis lygybėmis (1). Ištikrųjų iš ten betarpiškai turime:

$$k = \frac{\rho c}{s}; \quad q = \frac{\rho^2}{s}$$

Kadangi toje sistemoje ϱ ir c tam tikruose atvejuose gali tapti vienu laiku begaliniai dideliais, todel ir reiškiniai $\frac{\rho c}{s}$ ir $\frac{\rho^2}{s}$ (prie s nebegalinio, lygaus h) tuose atvejuose būtinai virsta ∞^2.

Be to iš aukščiau padėtosios lentelės matome, kad sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ esama šių lygybių:

$$(65)\ldots\left\{\begin{array}{llll}
c_{(\pi-\alpha)} = -c_\alpha; & t_{(\pi-\alpha)} = -t_\alpha; & k_{(\pi-\alpha)} = -k_\alpha; \\
z_{(\pi-\alpha)} = -z_\alpha; & q_{(\pi-\alpha)} = q_\alpha; & \varrho_{(\pi-\alpha)} = \varrho_\alpha; \\
c_{(\pi+\alpha)} = -c_\alpha; & t_{(\pi+\alpha)} = t_\alpha; & k_{(\pi+\alpha)} = k_\alpha; \\
z_{(\pi+\alpha)} = -z_\alpha; & q_{(\pi+\alpha)} = -q_\alpha; & \varrho_{(\pi+\alpha)} = \varrho_\alpha; \\
c_{(2\pi-\alpha)} = c_\alpha; & t_{(2\pi-\alpha)} = -t_\alpha; & k_{(2\pi-\alpha)} = -k_\alpha; \\
z_{(2\pi-\alpha)} = z_\alpha; & q_{(2\pi-\alpha)} = -q_\alpha; & \varrho_{(2\pi-\alpha)} = \varrho_\alpha; \\
c_{(2\pi+\alpha)} = c_\alpha; & t_{(2\pi+\alpha)} = t_\alpha; & k_{(2\pi+\alpha)} = k_\alpha; \\
z_{(2\pi+\alpha)} = z_\alpha; & q_{(2\pi+\alpha)} = q_\alpha; & \varrho_{(2\pi+\alpha)} = \varrho_\alpha;
\end{array}\right.$$

Šios formulos parodo, kad sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$, kaip ir nūn vartojamoje, esama netik atskirų kampų funkcijų, bet ir kampų sumų bei liekanų funkcijų. Šioms pastarosioms, pasigaunant dėstomųjų bei imstomųjų kampų funkcijų, lengvai galima surasti aplama formula. Tam tikslui kreipkimės į form. (63). Iš ten betarpiškai turime:

$$(66)\ldots\frac{\sin(\alpha+\omega)}{s(\alpha+\omega)} = \frac{\cos(\alpha+\omega)}{c(\alpha+\omega)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\omega)}{t(\alpha+\omega)} = \frac{1}{\rho(\alpha+\omega)}$$

Išgliaudę reiškinius $\sin(\alpha+\omega)$, $\cos(\alpha+\omega)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\omega)$ paprastosios trigonometrijos taisyklėmis ir įstatę juosna vieton $\sin\alpha$, $\sin\omega$, $\cos\alpha$, $\cos\omega$ $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\omega$ atitinkančius

toms funkcijoms iš (63) reiškinius: $\frac{s\alpha}{\rho\alpha}$, $\frac{s\omega}{\rho\omega}$, $\frac{c\alpha}{\rho\alpha}$, $\frac{c\omega}{\rho\omega}$, $\frac{t\alpha}{\rho\alpha}$, $\frac{t\omega}{\rho\omega}$ lengvai rasime kampų sumos funkcijoms formulas. Jos turės šią išvaizdą:

$$(67)\ldots \begin{cases} s(\alpha+\omega) = h \\ c(\alpha+\omega) = \frac{c\alpha\, c\omega - s\alpha\, s\omega}{c\alpha + c\omega} = \frac{c\alpha\, c\omega - h^2}{c\alpha + c\omega}, \\ t(\alpha+\omega) = \frac{t\alpha\, \rho\omega + t\omega\, \rho\alpha}{\rho(\alpha+\omega)(\rho\alpha\, \rho\omega - t\alpha\, t\omega)} \\ \qquad = \frac{\rho\alpha\, \rho\omega\,(t\alpha\, \rho\omega + t\omega\, \rho\alpha)}{(c\alpha + c\omega)(\rho\alpha\, \rho\omega - t\alpha\, t\omega)} \\ \rho(\alpha+\omega) = \frac{\rho\alpha\, \rho\omega}{c\alpha + c\omega} \end{cases}$$

Duodami čia dydžiui ω reikšmes α, 2α 3α . . ., iš form. (67) lengvai galima gauti padvejintų bei šiaipjau padaugintų kampų funkcijas; pav.

$$(68)\ldots \begin{cases} c_{2\alpha} = \frac{c^2 - h^2}{2c\alpha} \\ t_{2\alpha} = \frac{\rho^2\alpha\, t^2\alpha}{h(\rho^2\alpha - t^2\alpha)} \\ \rho_{m\alpha} = \frac{\rho^m\alpha}{(c\alpha + c\alpha)(c\alpha + c_{2\alpha})(c\alpha + c_{3\alpha})\ldots(c\alpha + c(m-1)\alpha)} \end{cases}$$

ir t. t.

Panašiu būdu galima gauti atatinkančios formulos kampų liekanų funkcijoms $s_{(\alpha-\omega)}$, $c_{(\alpha-\omega)}$ ir t. t.

Paprastosios stattrikampių gvaldymo formulos:

$$a = b \sin \alpha,\ c = b \cos \alpha,\ a = c \operatorname{tg} \alpha$$

sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ virs šiomis:

$$(69)\ldots a = \frac{b\,h}{\rho\alpha},\ c = \frac{b\,c\alpha}{\rho\alpha},\ a = \frac{c\,t\alpha}{\rho\alpha}.$$

Panašiu būdu bet kokių trikampių gvaldymo formuloms:

$$b = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta},\ S = \frac{b\,c \sin \alpha}{2}\ \text{ir kit.}$$

naujoje sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ atitiks šios naujos formulos:

$$(70)\ldots b = \frac{a\rho\beta}{\rho\alpha},\ S = \frac{b\,c\,h}{2\rho\alpha}\ \text{ir t. t.}$$

Pagalios žinomos formulos:

$$\begin{cases} [R(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^m = R^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha), \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};\ \sin ix = -\frac{e^x - e^{-x}}{2i} \\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};\ \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \rho_x = 1,\ \rho_{ix} = 1 \end{cases}$$

sistemoje $S^{s=h}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ turės išvaizdą:

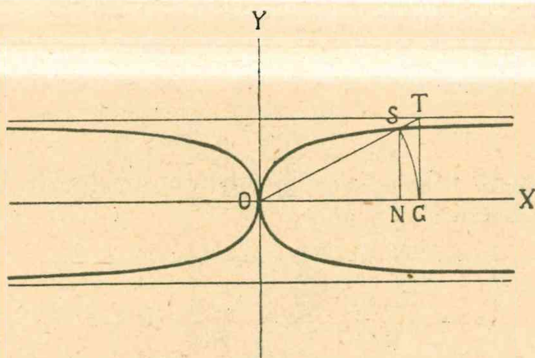
$$(71)\ldots \begin{cases} \left[R\left(\frac{c\alpha}{\rho\alpha} + \frac{ih}{\rho\alpha}\right)\right]^m = \frac{R^m}{\rho m\alpha}(c_{m\alpha} + ih) \\ s_x = h,\ s_{ix} = h \\ c_x = ih\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}\right);\ c_{ix} = -ih\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right), \\ t_x = \frac{2h}{e^{ix} - e^{-ix}};\ t_{ix} = \frac{2h}{e^x - e^{-x}}, \\ \rho_x = \frac{2ih}{e^{ix} - e^{-ix}};\ \rho_{ix} = -\frac{2ih}{e^x - e^{-x}}. \end{cases}$$

Iš visa to aišku, kad sistema $S^{s=h}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ yra tikra ir realė trigonometriška sistema, analogiška nūn vartojamąjai $S^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, visai lygiateisė su ja ir nemažiau kaip ji tinkama vartoti, gvaldant įvairius mokslo klausimus.

IX.

Dabar imkime antrą iš 28 mūsų atrastų elementarų sistemų būtent $S^{t=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$. Teesie, kaip ir pirmiau, kampas SON $= \alpha$. Tuomet SN bus $= s_\alpha$, ON $= c_\alpha$, TG $= t_\alpha = 1$, OS $=$ OB $= \varrho$ (ž. 3 brėž.). Geometriškoji punktų S vieta bus ketvirtojo laipsnio kreivoji iš vadinamųjų linijų „kappa“ kategorijos. Jos lyginys jau išreikštas form. (19). Santykiavimai tarp trigonometriškų nūn

vartojamosios sistemos funkcijų ir atitinkanciųjų joms sistemos $\underset{\varphi=\frac{\pi}{2}}{\overset{t=1}{S}}$ funkcijų bus tie patys, kaip



3 brėž.

form. (63). Naujos funkcijos bus irgi periodiškos; jų keitimosi lentelė kiekvienai ratilo kervirčiai turės šią išvaizdą:

(72) . . .

a	s	c	t	k	z	qa	ρ
O	1	∞	1	∞^2	∞	∞^2	∞
a	sa	ca	1	ka	za	qa	ρa
$\frac{\pi}{2}$	O	O	1	O	1	1	O
$\pi - a$	sa	— ca	— 1	— ka	— za	qa	ρa
π	1	$-\infty$	— 1	$-\infty^2$	$-\infty$	∞^2	∞
$\pi + a$	— sa	— ca	1	ka	— za	— qa	ρa
$\frac{3\pi}{2}$	O	O	1	O	— 1	— 1	O
$2\pi - a$	— sa	ca	— 1	— ka	za	— qa	ρa
2π	— 1	∞	— 1	$-\infty^2$	∞	$-\infty^2$	∞
$2\pi + a$	sa	ca	1	ka	za	qa	ρa

Formulas kampų sumos funkcijoms gausime iš (63) ir (65) nurodytu pereitame skyriuje būdu. Jos bus šitokios:

$$(73)\ldots\begin{cases} s(\alpha+\omega)=\dfrac{\rho(\alpha+\omega)}{\rho\alpha\,\rho\omega}(s\alpha\,c\omega+c\alpha\,s\omega) \\ c(\alpha+\omega)=\dfrac{\rho(\alpha+\omega)}{\rho\alpha\,\rho\omega}(c\alpha\,c\omega-s\alpha\,s\omega) \\ t(\alpha+\omega)=l \\ \rho(\alpha+\omega)=\dfrac{\rho\alpha\,\rho\omega-t\alpha\,t\omega}{\rho\alpha+\rho\omega}=\dfrac{\rho\alpha\,\rho\omega-l^2}{\rho\alpha+\rho\omega} \end{cases}$$

Formulos trikampiams gvaldyti bus panašios į (69) ir (70), būtent:

$$(74)\ldots\begin{cases} a=\dfrac{b\,s\alpha}{\rho\alpha},\ c=\dfrac{b\,c\alpha}{\rho\alpha},\ a=\dfrac{c\,l}{\rho\alpha}, \\ b=\dfrac{a\,s\alpha\,\rho\beta}{s\beta\,\rho\alpha},\ S=\dfrac{b\,c\,s\alpha}{2\rho\alpha}\ \text{ir t. t.} \end{cases}$$

Pagalios formulos atitinkančios (71) turės išvaizdą:

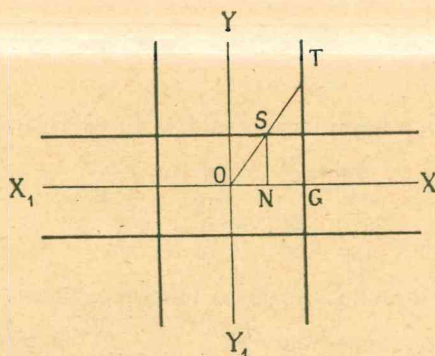
$$(75)\ldots\begin{cases} \left[R\left(\dfrac{c\alpha}{\rho\alpha}+i\,\dfrac{s\alpha}{\rho\alpha}\right)\right]^m=\dfrac{R^m}{\rho m\alpha}(cm\alpha+i\,sm\alpha) \\ sz=\dfrac{l\,(e^{iz}+e^{-iz})}{2},\ s\,iz=\dfrac{l\,(e^z+e^{-z})}{2}, \\ cz=\dfrac{i\,l\,(e^{iz}+e^{-iz})^2}{2\,(e^{iz}-e^{-iz})},\ c\,iz=-\dfrac{i\,l\,(e^z+e^{-z})^2}{2\,(e^z-e^{-z})} \\ \rho z=\dfrac{i\,l\,(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}},\ \rho\,iz=-\dfrac{i\,l\,(e^z+e^{-z})}{e^z-e^{-z}}. \end{cases}$$

Iš visa, kas šiame skyriuje pasakyta, aišku, kad ir sistema $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=l}$ yra tikra trigonometriška sistema, nes bet kokiai nūn vartojamosios trigonometrijos formulai turi tam tikrą savo formulą.

X.

Mūsų išgvildentoji VIII skyriuje sistema $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ yra labai artima sukrautinei sistemai $S_{z^2-t^2=g^2}^{\rho^2-c^2=d^2}$, kame d ir g yra nekintami dydžiai. Jos geometriškąjį vaizdą

sudaro keturios persikertančios tiesiosios, iš kurių dvi yra paralėli ašiai XX_1, nutiesti atstogumu nuo jos, lygiu $\pm$ d ir dvi paraleli ašiai YY_1 atstogi nuo jos dydžiu $= \pm g$ (žiūr. 4 brėž.).



4 brėž.

Paėmus čia bet kokį kampą SON $= \alpha$, rasime, kad sistemoje $S\,{}^{\rho^2 - c^2 = d^2}_{z^2 - t^2 = g^2}$ trigonometriškos funkcijos bus išreiškiamos šiomis linijomis: s_α = SN = d, c_α = ON, ϱ_α = OS, t_α = TG, z_α = OT, r_α = OG = g.

Santykiavimai paprastųjų trigonometriškųjų funkcijų su tomis naujomis bus šitokie:

$$(76)\ldots \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{s_\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{c_\alpha} = \dfrac{1}{\rho_\alpha}, \\ \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{t_\alpha} = \dfrac{\sec\alpha}{z_\alpha} = \dfrac{1}{r_\alpha} = \dfrac{1}{g}, \end{cases}$$

iš čia gaunama:

$$(77)\ldots \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha+\omega)}{s\,(\alpha+\omega)} = \dfrac{\cos(a+\omega)}{c\,(\alpha+\omega)} = \dfrac{1}{\rho(\alpha+\omega)} \\ \dfrac{\operatorname{tg}\,(\alpha+\omega)}{\operatorname{tg}\,(\alpha+\omega)} = \dfrac{\sec(\alpha+\omega)}{z\,(\alpha+\omega)} = \dfrac{1}{g}. \end{cases}$$

Šie pastarieji santykiavimai sistemoje $S\,{}^{\rho^2 - c^2 = d^2}_{z^2 - t^2 = g^2}$ kampų sumos funkcijoms gamina šias formulas:

$$
(78)\ldots \begin{cases} s(\alpha+\omega) = d \\ c(\alpha+\omega) = \dfrac{c\alpha\, c\omega - s\alpha\, s\omega}{c\alpha + c\omega} = \dfrac{c\alpha\, c\omega - d^2}{c\alpha\, c\omega} \\ t(\alpha+\omega) = g\left(\dfrac{t\alpha + t\omega}{g^2 - t\alpha\, t\omega}\right) \\ \rho(\alpha+\omega) = \dfrac{\rho\alpha\, \rho\omega}{c\alpha + c\omega} \\ r(\alpha+\omega) = g \end{cases}
$$

Formulos trikampiams gvaldyti turės išvaizdą:

$$
(79)\ldots \begin{cases} a = \dfrac{b\,d}{\rho\alpha},\ c = \dfrac{b\,c\alpha}{\rho\alpha},\ a = c\,\dfrac{t\alpha}{g} \\ b = \dfrac{a\,\rho\beta}{\rho\alpha},\ S = \dfrac{b\,c\,d}{2\,\rho\alpha}\ \text{ir t. t.} \end{cases}
$$

Pagalios formulos, kuriosna įeina menamasis (nerealis) dydis *i*, turės sistemoje $S^{\rho^2 - c^2 = d^2}_{z^2 - t^2 = g^2}$ išvaizdą:

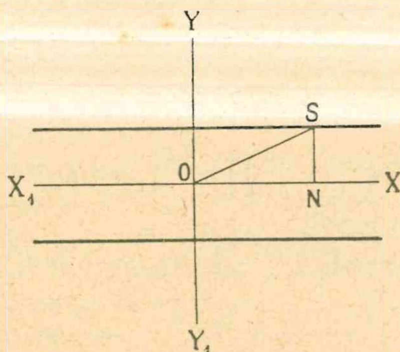
$$
(80)\ldots \begin{cases} \left[R\left(\dfrac{c\alpha}{\rho\alpha} + \dfrac{i\,d}{\rho\alpha}\right)\right]^m = \dfrac{R^m}{\rho m\alpha}\,(c m\alpha + i\,d) \\ s z = d,\ s\, iz = d \\ c z = d\left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\right),\ c\, iz = -\,id\left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right), \\ \rho z = \dfrac{2\,d}{e^{iz} - e^{-iz}},\ \rho\, iz = -\,\dfrac{2\,i\,d}{e^z - e^{-z}}. \end{cases}
$$

Tuo būdu pasirodo, kad ir sistema $S^{\rho^2 - c^2 = d^2}_{z^2 - t^2 = g^2}$ yra taipgi tikra, realė trigonometriška sistema, galinti rasti pritaikinimų įvairiuose mokslo klausimuose, kuriuosna įeina kampai bei jų funkcijos.

XI.

Kaip sistema $S^{s = h}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ yra artima sukrautinei $S^{\rho^2 - c^2 = d^2}_{z^2 - t^2 = g^2}$, taip sistema $S^{t = 1}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ savo žaru turi nemaž panašumo į sukrautinę $S^{\rho^2 - c^2 = u^2}_{t\,:\,s = 1}$.

Geometrišką šios pastarosios vaizdą sudaro dvi tiesi paraleli ašiai XX_1, nutiesti atstogumu lygiu $\pm$ u (ž. 5 brėž.).



5 brėž.

Paimkim čia bet kokį kampą SON $= \alpha$. Iš santykio $\varrho^2 - c^2 = u^2$ matome, kad toje sistemoje sinų krypsnis φ bus lygus statkampiui.

Tuo žvilgsniu šioje sistemoje trigonometriškoms funkcijoms atitiks šios linijos: $s_\alpha = SN = u$, $c_\alpha = ON$, $\varrho_\alpha = OS$, $s_\alpha = t_\alpha = SN$, $\varrho_\alpha = z_\alpha = OS$ ir t. t.

Santykiavimai tarp paprastųjų trigonometriškųjų funkcijų ir tarp tų naujų bus šie:

$$(81)\ldots\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{s_\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{c_\alpha} = \dfrac{1}{\rho_\alpha} \\[2mm] \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{t_\alpha} = \dfrac{\sec\alpha}{\rho_\alpha} = \dfrac{1}{c_\alpha} \end{cases}$$

iš čia gausime:

$$(82)\ldots\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha+\omega)}{s(\alpha+\omega)} = \dfrac{\cos(\alpha+\omega)}{c(\alpha+\omega)} = \dfrac{1}{\rho(\alpha+\omega)} \\[2mm] \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\omega)}{s(\alpha+\omega)} = \dfrac{\sec(\alpha+\omega)}{\rho(\alpha+\omega)} = \dfrac{1}{c(\alpha+\omega)}. \end{cases}$$

Iš (81) ir (82) rasime:

$$(83)\ldots\quad \begin{cases} s(\alpha+\omega) = u \\[2mm] c(\alpha+\omega) = \dfrac{c_\alpha c_\omega - s_\alpha s_\omega}{c_\alpha + c_\omega} = \dfrac{c_\alpha c_\omega - u^2}{c_\alpha + c_\omega} \\[2mm] \rho(\alpha+\omega) = \dfrac{\rho_\alpha \rho_\omega}{\rho_\alpha + \rho_\omega}. \end{cases}$$

Trikampiams gliaudyti toje sistemoje bus šios formulos:

$$(84)\ldots \begin{cases} a = \frac{b\,u}{\rho a},\; c = \frac{b\,c a}{\rho a},\; a = \frac{c\,u}{c a}, \\ b = \frac{a^{\rho}\beta}{\rho a},\; S = \frac{b\,c\,u}{2\rho a} \text{ ir t. t.} \end{cases}$$

Formulos su nerealiu dydžiu *į* gaus šią įšvaizdą:

$$(85)\ldots \begin{cases} \left[R\left(\frac{c a}{\rho a} + \frac{i\,u}{\rho a}\right)\right]^m = \frac{R^m}{\rho m a}\,(c\, m a + i\,u) \\ s\,z = u,\; s\,iz = u \\ c\,z = u\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\right),\; c\,iz = -\,i\,u\left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}\right) \\ \rho z = \frac{2u}{e^{iz} - e^{-iz}},\; \rho iz = -\,\frac{2iu}{e^{z} - e^{-z}}. \end{cases}$$

Iš sistemos $S\begin{smallmatrix} \rho^2 - c^2 = u^2 \\ t\,:\,s\;=1 \end{smallmatrix}$ matome, kad trigonometriškai sistemai nustatyti nėra kaikada net reikalo kreiptis į aštuonnarę grupę (2). Sistema gali būti nustatyta ir keturiais dydžiais s, c, ϱ ir φ, iš kurių bet kokiu du turi būti nekintamu, o likosiuoju du kintamu.

Žiūrint į tai, kad sistemoje $S\begin{smallmatrix} \rho^2 - c^2 = u^2 \\ t\,:\,s\;=1 \end{smallmatrix}$ del sino ir tangenso lygybės geometriškos punktų S ir T vietos sutampa, atitinkantieji joms lyginiai taipgi sutaps susiliedamu į vieną

$$y = u,$$

kurs prie u = 1 virs

$$(86)\ldots y = 1.$$

Lygindami lyg. (86) su lyginiais kitų sistemų nuo (16) lig. (44), o taipgi ir su (53), pamatysime, kad jis savo prastumu prašoksta visus likusius. Tai yra paskutinis prastumo laipsnis; tuo žvilgsniu eiti toliau nebegalima[1]).

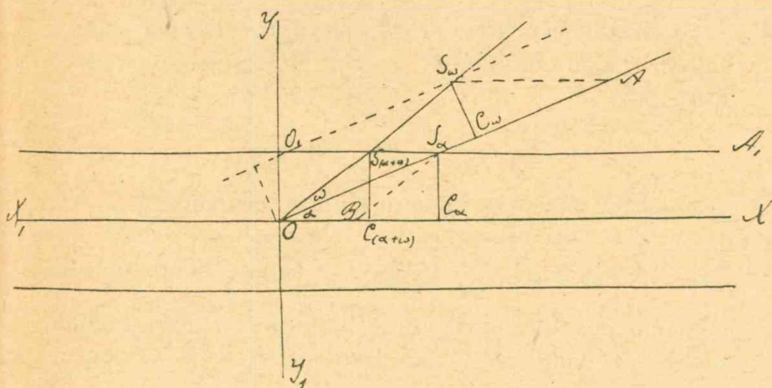
Tokiu pat prastumu pasižymi ir sistema $S\begin{smallmatrix} \rho^2 - c^2 = 1 \\ t\,:\,s\;=1 \end{smallmatrix}$,

[1]) Tolesni tyrinėjimai parodė, kad ir ši sistema nėra pati prastoji. Sk. mūsų straipsnį: „Kelios pastabos apie sistemas $S\begin{smallmatrix} \rho^2 - c^2 = 1 \\ s\,:\,t\;=1 \end{smallmatrix}$ ir $S\begin{smallmatrix} \rho^2 - c^2 = d^2 \\ z^2 - t^2 = g^2 \end{smallmatrix}$.

atitinkančioji lyginiui (86), kuri yra atskiras aplamesnės aukščiau paminėtos sistemos $S^{\rho^2 - c^2 = u^2}_{t\ :\ s\,=\,1}$ žygis. Lygiai kaip šioje pastaroje, taip ir sistemoje $S^{\rho^2 - c^2 = 1}_{t\ :\ s\,=\,1}$ tėra tik du kintamuoju dydžiu c ir ϱ, likusiuoju du $s = 1$ ir $\varphi = \frac{\pi}{2}$ yra nekiniamu.

Svarbiosios jos formulos buvo jau aukščiau išvestos iš nūn visuotinai vartojamosios trigonometrijos formulų. Bet galima tos formulos gauti ir neprigulmingai nuo jų. Pavyzdžio deliai parodysime čia, kaip gaunama toje sistemoje formulos kampų sumos funkcijoms betarpiškai geometrišku keliu.

Tam tikslui pabrėžkime kampus $C_\alpha O S_\alpha = \alpha$, $S_\alpha O S_\omega = \omega$ ir prileiskime, kad punktas S_α yra tiesioje O′A′, paralėlėje ašiai OX, nutiestoje atstogumu = 1 nuo tos ašies. Nubrėžkime tiesiąją $O'S_\omega$ paralėlę linijai OA atstogumu lygiu vienetui. Teesie S_ω linijų $O'S_\omega$ ir OS_ω persikirtimo punktas, o $S_{(\alpha+\omega)}$ — linijų O′A′ ir OS_ω persikirtimo punktas. Iš punkto S_ω nubrėžkime į tiesiąją OA perpendikulerą $S_\omega C_\omega$, iš punktų $S_{(\alpha+\omega)}$ ir S_α į ašį OX perpendikulerus $S_{(\alpha+\omega)} C_{(\alpha+\omega)}$ ir $S_\alpha C_\alpha$. Pagalios iš punkto S_α brėžkime tiesiąją $S_\alpha B \parallel OS_\omega$ ir iš punkto



6 brėž.

S_ω tiesiąją $S_\omega A \parallel OX$. Iš šio brėžimo matome, kad $S_\alpha C_\alpha = s_\alpha = 1$, $OC_\alpha = c_\alpha$, $S_\omega C_\omega = s_\omega = 1$, $OC_\omega = c_\omega$; $S_{(\alpha+\omega)} C_{(\alpha+\omega)} = s_{(\alpha+\omega)} = 1$, $OC_{(\alpha+\omega)} = c_{(\alpha+\omega)}$, $OS_\alpha = \varrho_\alpha$, $OS_\omega = \varrho_\omega$, $OS_{(\alpha+\omega)} = \varrho_{(\alpha+\omega)}$.

Iš panašių trikampių OBS_α ir $OS_\omega A$ gauname:

$$\frac{OB}{OS_\alpha} = \frac{AS_\omega}{OA}$$

arba

$$\frac{O'S_\alpha - O'S_{(\alpha+\omega)}}{OS_\alpha} = \frac{AS_\omega}{OC_\omega + C_\omega A'}$$

iškur gauname:

$$\frac{c_\alpha - c_{(\alpha+\omega)}}{\rho_\alpha} = \frac{\rho_\alpha}{c_\alpha + c_\omega}.$$

Dauginant kryžmais ši lyginį ir atsimenant, kad $\varrho^2_\alpha - c^2_\alpha = 1$, gaunama:

$$c_{(\alpha+\omega)} = \frac{c_\alpha c_\omega - 1}{c_\alpha + c_\omega}.$$

Panašiu būdu iš trikampių $OS_\alpha S_{(\alpha+\omega)}$ ir OAS_ω turime:

$$\frac{OS_{(\alpha+\omega)}}{OS_\alpha} = \frac{OS_\omega}{OA}$$

arba

$$\frac{\rho_{(\alpha+\omega)}}{\rho_\alpha} = \frac{\rho_\omega}{c_\alpha + c_\omega}$$

iškur:

$$\rho_{(\alpha+\omega)} = \frac{\rho_\alpha \rho_\omega}{c_\alpha + c_\omega}.$$

Šis išvedimas pridera prof. Lefèvre'ui, vertėjui prancūzų kalbon mūsų brošiūros: „Pri novaj trigonometriaj sistemoj".

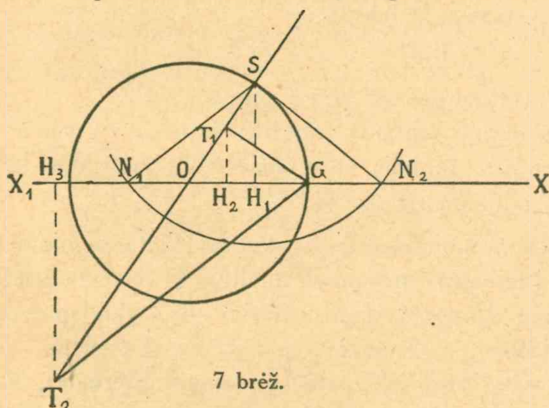
XII.

Aukščiau mūsų išgvildentos keturios sistemos $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, $S^{t=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, $S^{\rho^2-c^2=d^2}_{z^2-t^2=g^2}$ ir $S^{\rho^2-c^2=u^2}_{t\,:\,s=1}$, kaip parodo jų pamatinės formulos, yra gana artimos viena kitai ir todel turi daug panašumo tarp savęs. Visose jose φ yra nekintamas ir lygus $\frac{\pi}{2}$. Parinkimas to dydžio labai

suprastino formulas ir padarė jąs panašias į formulas nūn vartojamosios trigonometrijos, kurioje φ taipgi yra nekintamas ir lygus $\frac{\pi}{2}$.

Bet trigonometriškoms sistemoms tverti, kaip jau aukščiau esam minėję, ši sąlyga nėra būtina. Dydis φ gali būti bet koks, dargi kintamas. Kad geriau tai paaiškėtų, aprašysime čia trumpai sistemą $S^{\rho = r}_{s = n}$.

Teesie bet koks kampas $SON_2 = \alpha$, $SO = OG = r$ (z. 7 brėž). Iš punkto S, lyg iš centro, stipinu lygiu n apibrėžkime lanką N_1N_2. Teesie N_1 ir N_2 punktai, kuriuose lankas N_1N_2 perkerta ašį XX_1; sujungę punktus N_1 ir N_2 tiesiomis su punktu S ir nubrėžę iš punkto G tiesiąsias



7 brėž.

T_1G ir T_2G paraleles tiesioms SN_1 ir SN_2, gausime, $S_1N = SN_2 = s_\alpha = n$, $T_1G = t'_\alpha$, $T_2G = t''_\alpha$, $ON_1 = c'_\alpha$, $ON_2 = c''_\alpha$, $OT_1 = z'_\alpha$, $OT_2 = z''_\alpha$ ir t. t.

Kaip matome sistema $S^{\rho = r}_{s = n}$, prie $\varrho = r$ nekintamojo, turi visas funkcijas dvejopas: joje randame po du sinu, kosinu, tangensu, kotangensu, sekansu, kosekansu, o draug ir dvejopą krypsnį, būtent $\varphi' = \angle SN_1N_2$ ir $\varphi'' = \angle SN_2X$. Išskyrus sinus, ir kosekansus visos kitos funkcijos bus nelygios; lygiomis ir vienstipėmis jos virs tik tada, kuomet perpendikuleras SH_1, nuleistas iš punkto S į ašį

XX„ bus lygus $SN_1 = SN_2 = n$. Jei dydis n būtų mažesnis kaip $SH_1 = n \sin \varphi$, tai sistema virstų menamaja (nereale), nes iš nelygybės $n \angle n \sin \varphi$ išeitu, jog $\sin \varphi$ esąs didesnis kaip vienetas, bet, kaip žinoma, tai yra negalimas daiktas.

Santykiavimai nūn vartojamosios trigonometrijos funkcijų su sistemos $S_{s=n}^{\rho=r}$ funkcijomis galima išreikšti šiomis formulomis:

$$(87)\ldots \begin{cases} \dfrac{\sin \alpha}{\pm n \sin \varphi'} = \dfrac{\cos \alpha}{c_\alpha \mp n \cos \varphi'} = \dfrac{1}{r}, \\ \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm t_\alpha \sin \varphi'} = \dfrac{\sec \alpha}{\pm z_\alpha} = \dfrac{1}{r \pm t_\alpha \cos \varphi'}. \end{cases}$$

Kampas φ' atitinkąs duotajam kampui α formulose (87) yra išvedamas iš lyginio:

$$(88)\ldots n = \frac{r \sin \alpha}{\sin \varphi'}.$$

Antras kampas φ'' yra lygus $\pi - \varphi'$.

Sankampiai čia bus taipgi dvejopi: $\varphi' - \alpha$ ir $\varphi'' - \alpha$.

Dvejopas ženklas formulose (87) atatinka funkcijų dvejopumui sistemoje $S_{s=n}^{\rho=r}$.

Aukščiau minėtasis žygis, kuomet sistema virsta menamąja (nereale), nesunku analitiškai išvesti. Ištikrųjų gvaldant drauge lyginius (87) ir (88), randame:

$$(89)\ldots c_\alpha = r \cos \alpha \pm \sqrt{n^2 - r^2 \sin^2 \alpha},$$

iškur aišku kad c_α virsta menamaja (nereale), kuomet $n < r \sin \alpha$ arba $n < SH_1$ [1]).

Iš form. (87) taipgi turime:

$$(90)\ldots \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha+\omega)}{\pm n \sin \Phi'} = \dfrac{\cos(\alpha+\omega)}{c(\alpha+\omega) \mp n \cos \Phi'} = \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\omega)}{\pm t(\alpha+\omega) \sin \Phi'} = \dfrac{\sec(\alpha+\omega)}{\pm z(\alpha+\omega)} = \dfrac{1}{r \pm t(\alpha+\omega) \cos \Phi'}. \end{cases}$$

[1]) Tačiau šio menamumo (nerealumo) lengva išvengti. Tam tikslui gana yra paimti n tokis, kad santykis $\frac{n}{r}$ būtų didesnis kaip vienetas. Kadangi r yra nekintamas ir nuo n visai neprigulmingas dydis, tatai aukščiau nurodytoji sąlyga teoretiškai yra visada galima. Ji taptų negalima tik tame atvejyje, kuomet dydis r būtų duotas kaipo sistemos $S_{s=n}^{p=r}$ sudarymo sąlyga ir todel būtų nebegalimas keisti.

iškur galima gauti formulos kampų sumos funkcijoms sistemoje $S_{s=n}^{\rho=r}$. Jos turės išvaizdą:

$$
(91)\dots\begin{cases}
s(\alpha+\omega)=n \\
c(\alpha+\omega)=n\cos\Phi'+ \\
\qquad \frac{1}{r}\left[c_\alpha c_\omega - n(c_\alpha\cos\psi'+c_\omega\cos\varphi')+n^2\cos(\varphi'+\psi')\right] \\
t(\alpha+\omega)= \\
\qquad \frac{r(A t_\alpha\sin\varphi'+B t_\omega\sin\psi')}{\sin\Phi'(AB-t_\alpha t_\omega\sin\varphi'\sin\psi')-\cos\Phi'(A t_\alpha\sin\varphi'+B t_\omega\sin\psi')},
\end{cases}
$$

kame kampai Φ' ir ψ' atitinka kampams $(\alpha+\omega)$ ir ω, kaip φ' atitinka kampui α lyginyje (88), o dydžiai A ir B yra išreiškiami lygybėmis:

$$A = r + t_\omega\cos\psi'$$
$$B = r + t_\alpha\cos\varphi'.$$

Panorėjus galima surasti sistemai $S_{s=n}^{\rho=r}$ formulos trikampiams gvaldyti. Jos turės išvaizdą

$$
(92)\dots\begin{cases}
a=\frac{n\,b\sin\varphi'}{r},\quad c=\frac{b\,(c_\alpha\mp n\cos\varphi')}{r}, \\
a=\frac{c\,t_\alpha\sin\varphi'}{r\pm t_\alpha\cos\varphi'} \\
a=\frac{b\sin\varphi'}{\sin\lambda'},\quad S=\frac{n\,b\,c\sin\varphi'}{2r}\ \text{ir t. t.}
\end{cases}
$$

Formulos, kuriosna įeina transcendentė funkcija *e* sistemoje $S_{s=n}^{\rho=r}$ igaus šią formą:

$$
(93)\dots\begin{cases}
s_z=n=s_{iz} \\
c_z=\frac{r}{2}\left[(e^{iz}+e^{-iz})\pm\sqrt{4n^2-r^2(e^{iz}-e^{-iz})^2}\right] \\
c_{iz}=\frac{i\,r}{2}\left[(e^{z}+e^{-z})\pm\sqrt{4n^2-r^2(e^{z}-e^{-z})^2}\right] \\
t_z=\frac{2n}{r(e^{iz}+e^{-iz})\pm\sqrt{4n^2-r^2(e^{iz}-e^{-iz})^2}} \\
t_{iz}=\frac{2ni}{i\,r(e^{z}+e^{-z})\pm\sqrt{4n^2-r^2(e^{z}-e^{-z})^2}} \\
\rho_z=r=\rho_{iz}
\end{cases}
$$

Sistema $S_{s=n}^{\rho=r}$ daros žymiai prastesnė prie $r=n$, nes tuomet $c'_\alpha=0$, $c''_\alpha=2n\cos\alpha$, $t''_\alpha=-\infty$, $t'_\alpha=\frac{r}{2\cos\alpha}$ ir t. t.

Be to šiame žygyje φ virsta lygiu α, iškur eina, kad iš dviejų sankampių vienas bus lygus 0, antras $\pi-2\alpha$.

4*

Todel ši sistema prie r = n, kad ir išlaiko funkcijų dvejopumą, bet ištikrųjų šiame žygyje kiekviena trigonometriška funkcija teturi po vieną tik suskaitomą reikšmę.

XIII.

Sistemos, kurias ligšiol gvildenome, nežiūrint jų begalinio įvairumo, turi visgi vieną bendrą ypatybę: jos pamatuojama vienais ir tais pačiais trigonometriškų linijų santykiavimais, nustatytais lygybėse (1). Svarbiausioji šių pastarųjų ypatybė yra ta, kad jose į visas trigonometriškas funkcijas žiūrima, kaip į šešių trigonometriškų linijų santykiavimus su septintaja ϱ, t. y. ratilo stipinu.

Teoretiškai kalbant, galima imti vieton ϱ bet koki kita trigonometriška linija ir ieškot santykiavimų su ja likusiujų šešių kitų. Tuo keliu vėl gausime šešias naujas santykiavimų išvaizdas, būtent

$$(94)\ldots\left\{\begin{array}{l} \rho,\ c,\ t,\ k,\ z,\ q \text{ su } s, \\ s,\ \rho,\ t,\ k,\ z,\ q \text{ su } c, \\ s,\ c,\ \rho,\ k,\ z,\ q \text{ su } t, \\ s,\ c,\ t,\ \rho,\ z,\ q \text{ su } k, \\ s,\ c,\ t,\ k,\ \rho,\ q \text{ su } z, \\ s,\ c,\ t,\ k,\ z,\ \rho \text{ su } q. \end{array}\right.$$

Naudojantis lyg. (1) lengva tie santykiavimai išreikšti matematiškai, pasigaunant tam tikrų lygybiu, analogiškų lygybėms (1) ir iš šių išvedamų. Šitos lygybės šiaip atrodys:

1) eilei santykiavimų ϱ, c, t, k, z q su s:

$$(95)\ldots\left\{\begin{array}{l} \frac{\rho}{s} = R', \frac{t}{s} = \frac{\rho}{c} = T', \frac{z}{s} = \frac{\rho^2}{sc} = Z', \\ \frac{c}{s} = C', \frac{k}{s} = \frac{\rho c}{s^2} = K', \frac{q}{s} = \frac{\rho^2}{s^2} = Q', \end{array}\right.$$

2) eilei santykiavimų s, ϱ, t, k, z, q su c:

$$(96)\ldots\left\{\begin{array}{l} \frac{s}{c} = S'', \frac{t}{c} = \frac{\rho s}{c^2} = T'', \frac{z}{c} = \frac{\rho^2}{c^2} = Z'', \\ \frac{\rho}{c} = R'', \frac{k}{c} = \frac{\rho}{s} = K'', \frac{q}{c} = \frac{\rho^2}{sc} = Q'', \end{array}\right.$$

3) eilei santykiavimų s, c, ϱ, k, z, q su t:

$$(97)\ldots\begin{cases}\frac{s}{t}=\frac{c}{\rho}=S''', \frac{\rho}{t}=\frac{c}{s}=R''', \frac{z}{t}=\frac{\rho}{s}=Z''',\\ \frac{c}{t}=\frac{c^2}{\rho s}=C''', \frac{k}{t}=\frac{c^2}{s^2}=K''', \frac{q}{t}=\frac{c\rho}{s^2}=Q''',\end{cases}$$

4) eilei santykiavimų s, c, t, ϱ, z, q su k:

$$(98)\ldots\begin{cases}\frac{s}{k}=\frac{s^2}{\rho c}=S^{IV}, \frac{t}{k}=\frac{s^2}{c^2}=T^{IV}, \frac{z}{k}=\frac{\rho s}{c^2}=Z^{IV},\\ \frac{c}{k}=\frac{s}{\rho}=C^{IV}, \frac{\rho}{k}=\frac{s}{c}=R^{IV}, \frac{q}{k}=\frac{\rho}{c}=Q^{IV},\end{cases}$$

5) eilei santykiavimų s, c, t, k, ϱ, q su z:

$$(99)\ldots\begin{cases}\frac{s}{z}=\frac{sc}{\rho^2}=S^{V}, \frac{t}{z}=\frac{s}{\rho}=T^{V}, \frac{\rho}{z}=\frac{c}{\rho}=R^{V},\\ \frac{c}{z}=\frac{c^2}{\rho^2}=C^{V}, \frac{k}{z}=\frac{c^2}{\rho s}=K^{V}, \frac{q}{z}=\frac{c}{s}=Q^{V},\end{cases}$$

6) eilei santykiavimų s, c, t, k, z, ϱ su q:

$$(100)\ldots\begin{cases}\frac{s}{q}=\frac{s^2}{\rho^2}=S^{VI}, \frac{t}{q}=\frac{s^2}{\rho c}=T^{VI}, \frac{z}{q}=\frac{s}{c}=Z^{VI},\\ \frac{c}{q}=\frac{sc}{\rho^2}=C^{VI}, \frac{k}{q}=\frac{c}{\rho}=K^{VI}, \frac{\rho}{q}=\frac{s}{\rho}=R^{VI},\end{cases}$$

Versdami paeiliui lygybėse nuo (95) lig (100) s, c, t, k, z, q nekintamais ir lygiais vienetui dydžiais, gausime 36 naujas trigonometriškas funkcijas R', C', T', K', Z', Q', S'', C'' . . . R^{VI}. Tarp jų visai skirtinų nuo kita kitos tebus tik 18, būtent 9 tiesioginės:

$$(101)\ldots\begin{cases}R'=\frac{\rho}{s}, \quad T'=\frac{\rho}{c}, \quad C'=\frac{c}{s},\\ Z'=\frac{\rho^2}{sc}, \quad K'=\frac{\rho c}{s^2}, \quad Q'=\frac{\rho^2}{s^2},\\ T''=\frac{\rho s}{c^2}, \quad Z''=\frac{\rho^2}{c^2}, \quad T^{IV}=\frac{s^2}{c^2}\end{cases}$$

ir tiek pat atverstinių:

$$(102)\ldots\begin{cases}C^{IV}=\frac{s}{\rho}, \quad S'''=\frac{c}{\rho}, \quad S''=\frac{s}{c},\\ S^{V}=\frac{sc}{\rho^2}, \quad T^{VI}=\frac{s^2}{\rho c}, \quad S^{VI}=\frac{s^2}{\rho^2},\\ C'''=\frac{c^2}{\rho s}, \quad C^{V}=\frac{c^2}{\rho^2}, \quad K'''=\frac{c^2}{s^2},\end{cases}$$

18 likusiųjų sutaps su funkcijomis (101) arba (102).

Visos jos savaime yra arba elementarės trigonometriškos funkcijos, arba jų padaugai po dvi, pav.:

$$(103)\;.\;.\;\begin{cases} Z' = \frac{\rho^2}{sc} = \frac{\rho}{s}\cdot\frac{\rho}{c} = R'\cdot T',\; T'' = \frac{\rho s}{c^2} = \frac{\rho}{c}\cdot\frac{s}{c} = T'\cdot S'', \\ K' = \frac{\rho c}{s^2} = \frac{\rho}{s}\cdot\frac{c}{s} = R'\cdot C',\; Q' = \frac{\rho^2}{s^2} = \frac{\rho}{s}\cdot\frac{\rho}{s} \\ \qquad = R'\cdot R' = (R')^2 \text{ ir t. t.} \end{cases}$$

Be to sulyginus lyg. (95) su (97), (98) ir sekanciais, matome, kad tarp įvairių rūšių funkcĭjų esama lygybės, pav.

$$(104)\;.\;.\;R' = K'' = Z'''; T' = R'' = Q^{IV} \text{ ir t. t.}$$

Tai parodo įvairių trigonometriškų sistemų kitos kitai atitinkamybę, deliai kurios vienòs iš jų tangensui atitiks antros kosinas, trečios kosekansas ir t. t.

Tatai, kad ir galima teoretiškai iš kiekvienos santykiavimų eilės nuo (95) lig (100), pasigaunant naujų funkcijų $R', T', Z', C', K', Q' \ldots K^{VI}, R^{VI}$, sudaryti po 28 naujas elementares sistemas ir begalinę sukrautinių trigonometriškų sistemų daugybę, tačiau visai naujos jos bus toli gražu nevisos; nemaža ten sutiksime ir visai identiškų toms, kurios jau aukščiau buvo išgvildentos. Taip bus delto, kad lygybėse nuo (95) lig (100) dedamose tų naujų sistemų pamatan, pasitaiko ir tokių santykiavimų, kurie yra visai identiški pamatinių lygybių (1) santykiavimams, pav. $\frac{\rho}{s}$, $\frac{\rho}{c}$, $\frac{s}{c}$ ir kiti.

Šis faktas, savo žaru, leidžia mūsų atrastų naujų trigonometriskų funkcijų esmę arčiau įspitrėti ir duoti joms griežtą matematiškąjį jų sąvokojimą, ko lig šiol, kaip reikiant, da nebuvo mūsų padaryta.

Ištikrųjų aukščiau tyrinėdami sistemas $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=1}$, $S_{s=a}^{\rho=r}$ ir kitas, mes ligšiol žiūrėjome į ųj funkcijas daugiausia geometrijos žvilgsniu, kaipo į linijas, remdamies geometrišku tųjų sistemų vaizdu. Tuo keliu žinomam kampui α buvo gauta kiekvienoje sistemoje tam tikri sinai (s_α), kosinai (c_α), tangensai (t_α)

ir kitos trigonometriškos linijos. Dabar ištirsime, kas yra tie *s*, *c*, *t* ir t. t., kaipo funkcijos, t. y. kokiais trigonometriškų linijų santykiavimais, galima jie matematiškai išreikšti.

Tuo tikslu kreipkimės į lygybės nuo (95) lig (100). Versdami pirmame iš jų *s* nekintamu ir lygiu *h*, lengvai patėmysime, kad formulos (95) bus ne kas kita, kaip trigonometriškųjų linijų santykiavimai sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=n}$ prie n = h. Kadangi iš tų santykiavimų gaunama ši lygybių eilė:

$$(105) \; . \; . \; \begin{cases} \rho = h\,R', \; t = h\,T', \; z = h\,Z', \\ c = h\,C', \; k = h\,K', \; q = h\,Q' \end{cases}$$

tai imant čia h = 1, rasime, jog

$$(106) \; . \; . \; \begin{cases} \rho = R', \; t = T', \; z = Z', \\ c = C', \; k = K', \; q = Q'. \end{cases}$$

Bet R′, T′, Z′, C′, K′, Q′, kaip matome iš lygybių (95), sąvokojama nurodytais trigonometriškų linijų santykiavimais, taigi tais pačiais santykiavimais bus sąvokojama ir funkcijos ϱ, t, z, c, k, q. Tuo būdu gausime galutiną lygybių eilę:

$$(107) \; . \; . \; \begin{cases} \rho = \frac{\rho}{s}, \; t = \frac{\rho}{c}, \; z = \frac{\rho^2}{sc}, \\ c = \frac{c}{s}, \; k = \frac{\rho c}{s^2}, \; q = \frac{\rho^2}{s^2}, \end{cases}$$

Tai yra sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=h}$ prie h = 1 matematiškas funkcijų ϱ, t, z, c, k, q sąvokojimas.

Bet kadangi iš lygybių (1) žinome, jog

$$\frac{\rho}{s} = \text{cosec}, \; \frac{\rho}{c} = \text{sec}, \; \frac{\rho^2}{sc} = \text{sec} \cdot \text{cosec},$$

$$\frac{c}{s} = \text{cotg}, \; \frac{\rho c}{s^2} = \text{cosec} \cdot \text{cotg}, \; \frac{\rho^2}{s^2} = \text{cosec}^2,$$

todel tarp naujų funkcijų, atitinkančių sistemai $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=1}$ ir paprastųjų nūn vartojamosios sistemos kampo α funkcijų bus šios lygybės:

$$(108)\ .\ .\ \begin{cases} \rho_\alpha = \operatorname{cosec}\alpha,\ t_\alpha = \sec\alpha,\ z_\alpha = \sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}, \\ c_\alpha = \operatorname{cotg}\alpha,\ k_\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\ q_\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha. \end{cases}$$

Panašiu būdu iš lyg. (97) surasime matematiškąjį, funkcijų s, ϱ, z, c, k, q sąvokojimą, sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=1}$ prie l = 1. Jis galima bus išreikšti šiais lygybėmis:

$$(109)\ .\ .\ \begin{cases} s = \dfrac{c}{\rho} = \cos,\ \rho = \dfrac{c}{s} = \operatorname{cotg},\ z = \dfrac{\rho}{s} = \operatorname{cosec}, \\ c = \dfrac{c^2}{\rho s} = \cos\cdot\operatorname{cotg},\ k = \dfrac{c^2}{s^2} = \operatorname{cotg}^2,\ q = \dfrac{\rho c}{s^2} = \operatorname{cotg}\cdot\operatorname{cosec}. \end{cases}$$

Likusiosios lygybės (96), 98), (99), (100), leis mums trigonometriškas funkcijas sistemose $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{z=a}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{q=a}$, imant $a = 1$, išreikšti taipgi tam tikrų linijų santykiavimais. Tie santykiavimai bus šitokie:

sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c=1}$

$$(110)\ .\ .\ \begin{cases} s = \dfrac{s}{c} = \operatorname{tg},\ t = \dfrac{\rho s}{c^2} = \sec\cdot\operatorname{tg},\ z = \dfrac{\rho^2}{c^2} = \sec^2, \\ \rho = \dfrac{\rho}{c} = \sec,\ k = \dfrac{\rho}{s} = \operatorname{cosec},\ q = \dfrac{\rho^2}{sc} = \operatorname{cosec}\cdot\sec; \end{cases}$$

sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k=1}$:

$$(111)\ .\ .\ \begin{cases} s = \dfrac{s^2}{\rho c} = \sin\cdot\operatorname{tg},\ t = \dfrac{s^2}{c^2} = \operatorname{tg}^2,\ z = \dfrac{\rho s}{c^2} = \sec\cdot\operatorname{tg}, \\ c = \dfrac{s}{\rho} = \sin,\ \rho = \dfrac{s}{c} = \operatorname{tg},\ q = \dfrac{\rho}{c} = \sec; \end{cases}$$

sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{z=1}$

$$(112)\ .\ .\ \begin{cases} s = \dfrac{sc}{\rho^2} = \sin\cdot\cos,\ t = \dfrac{s}{\rho} = \sin,\ \rho = \dfrac{c}{\rho} = \cos, \\ c = \dfrac{c^2}{\rho^2} = \cos^2,\ k = \dfrac{c^2}{\rho s} = \operatorname{cotg}\cdot\cos,\ q = \dfrac{c}{s} = \operatorname{cotg}; \end{cases}$$

sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{q=1}$

$$(113)\ .\ .\ \begin{cases} s = \dfrac{s^2}{\rho^2} = \sin^2,\ t = \dfrac{s^2}{c\rho} = \operatorname{tg}\cdot\sin,\ z = \dfrac{s}{c} = \operatorname{tg}, \\ c = \dfrac{sc}{\rho^2} = \sin\cdot\cos,\ k = \dfrac{c}{\rho} = \cos,\ \rho = \dfrac{s}{\rho} = \sin. \end{cases}$$

Panorėjus, galima likusių elementarių ir įvairių sukrautinių sistemų trigonometriškas funkcijas išreikšti irgi tam tikrų linijų santykiavimų pavidale. Bet tie santykiavimai daugiausia bus gana painūs, taigi čia jų nei nedėsime. Pažymėsime tiktai, kad prasčiausioje iš visų sukrautinių sistemoje $S^{\rho^2 - c^2 = u^2}_{t\,:\,s = 1}$ funkcijos ϱ ir c prie u = 1 bus išreiškiamos šiais santykiavimais:

$$(114)\ .\ .\ \begin{cases} \rho = \frac{\rho}{s} = \text{cosec}, \\ c = \frac{c}{s} = \text{cotg}. \end{cases}$$

XIV.

Kadangi sin, cos, tg, cotg, sec, cosec gali būti netik betkokio kampo α, bet ir matuojančio tą kampą lanko, apibrėžto stipinu = 1, funkcijomis, tatai aisku, kad į kitų trigonometriškų sistemų funkcijas s_α, z_α, t_α, c_α, k_α, q_α galima žūrėti taipgi kaipo į matuojančio tą patį kampą α lanko funkcijas, galinčias būti įvairiame sąryšyje su juo, sulig tos ar kitos sistemos įvairumo bei esmės. Turint visa tai omenėje, galima aukščiau minėtosios funkcijos s_α, t_α, z_α ir k. taikinti netik įvairiems elementarės trigonometrijos klausimams gvaldyti, bet ir aukštesnėje analizėje jos vartoti.

Pavyzdžiui imkim sistemą $S^{s = h}_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ ir jos funkcijas ϱ_x, t_x, c_x ir k. ir pabandykim surasti jų diferencialus.

Tam tikslui kreipkimės į lyg. (63). Iš ten gausime:

$$\frac{\sin x}{s_x} = \frac{\sin x}{h} = \frac{1}{\rho_x}$$

arba:

$$(115)\ .\ .\ \rho_x = \frac{h}{\sin x} = h \text{ cosec } x.$$

Diferencijuodami lyg. (115) gauname:

$$(116)\ .\ .\ d\rho_x = d\,(h \text{ cosec } x) = -\frac{h \cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

Įstatydami dešinėn lygybės (116) pusėn vieton cos x, sin x jiems atitinkančius reiškinius $\frac{c_x}{\rho_x}$, $\frac{s_x}{\rho_x} = \frac{h}{\rho_x}$, paimtus iš lyg. (63) rasime:

$$(117) \ldots d\rho_x = -\rho_x \frac{c_x}{h} dx,$$

iš kur betarpiškai gausime taipgi:

$$(118) \ldots \frac{d\rho_x}{\rho_x} = d \lg \rho_x = -\frac{c_x}{h} dx.$$

Panašiu būdu rasime ir kitų tos pat sistemos funkcijų diferencialus. Jie turės išvaizdą:

$$(119) \ldots \begin{cases} d c_x = -\frac{(h^2 + c^2_x)}{h} d x = -\frac{\rho^2_x}{h} d x, \\ d t_x = \frac{\rho_x (\rho^2_x - c^2_x)}{c^2_x} = \frac{h^2 \rho_x}{c^2_x} dx = \frac{h\, t_x}{c_x} d x, \\ d z_x = \rho^2_x \frac{(h^2 - c^2_x)}{h\, c^2_x} = \frac{z_x}{c_x} \left(\frac{h^2 - c^2_x}{h}\right) \\ \qquad = q_x \left(\frac{h^2 - c^2_x}{c^2_x}\right) \\ d k_x = -\frac{\rho_x (c^2_x + \rho^2_x)}{h^2} d x = -\frac{k_x (c^2_x + \rho^2_x)}{h c_x} d x, \\ d q_x = -\frac{2 \rho^2_x}{h^2} c_x d x = -\frac{2 q_x c_x}{h} d x, \end{cases}$$

Iš lygynių (117), (118), (119) prie h = 1 gauname sistemos $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ šiuos diferencialus:

$$(120) \ldots \begin{cases} d \rho_x = -\rho_x c_x d x \\ d \lg \rho_x = - c_x d x \\ d c_x = -\rho^2_x d x \\ d t_x = \frac{t_x d_x}{c_x} \\ d \lg t_x = \frac{d_x}{c_x} \\ d z_x = \frac{z_x}{c_x} (1 - c^2_x) = q_x \left(\frac{1 - c^2_x}{c^2_x}\right) \\ d k_x = -\frac{k_x (c^2_x + \rho^2_x)}{c_x} d x \\ d \lg k_x = -\frac{(c^2_x + \rho^2_x)}{c_x} d x \\ d q_x = -2 q_x c_x d x \\ d \lg q_x = -2 c_x d x \quad \text{ir t. t.} \end{cases}$$

Iš čia matome, jog sistemoj $\mathfrak{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=1}$ esama taipgi ir šių integralų:

$$(121) \ldots \begin{cases} \int \rho_x c_x \, dx = -\rho_x + C \\ \int c_x \, dx = -\lg \rho_x + C \\ \int \rho^2_x \, dx = -c_x + C \\ \int \frac{t_x}{c_x} \, dx = t_x + C \\ \int \frac{dx}{c_x} = \lg t_x + C \\ \int \frac{z_x}{c_x} (1 - c^2_x) \, dx = z_x + C \\ \int c_x (1 - c^2_x) \, dx = \lg z_x + C \\ \int \frac{k_x}{c_x} (c^2_x + \rho^2_x) dx = -k_x + C \\ \int \frac{(c^2_x + \rho^2_x)}{c_x} \, dx = -\lg k_x + C \\ \int 2 q_x c_x \, dx = -q_x + C \\ \int 2 c_x \, dx = -\lg q_x + C \quad \text{ir t. t.} \end{cases}$$

Norint galima taipgi išdėti šios naujos funkcijos eilėmis, remiantis lygybėmis (108). Tos eilės turės išvaizdą:

$$(122) \ldots \begin{cases} \rho_x - \frac{1}{x} = \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3 \cdot 5!} + \frac{29x^5}{3 \cdot 7!} + \ldots \\ \qquad + \frac{2(2^{2m+1} - 1)}{(2m+2)!} B_{2m+2} \cdot x^{2m+1} + \ldots, \\ t_x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \ldots \\ \qquad + E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots, \\ c_x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \frac{1}{4725} x^7 - \ldots \\ \qquad = -\sum_1^{\infty} \frac{2^{2m}}{(2m)!} \cdot B_{2m} \, x^{2m-1}, \end{cases}$$

kame E_{2m} reiškia Eulero, o B_{2m}, B_{2m+2} — Bernoulli'o skaitmenis.

Prilyginus y - kui funkcijas c_x, ϱ_x, t_x ir k., gausime tam tikrų kreivųjų lyginius:

$$(123) \ldots \begin{cases} y = c_x, & y = t_x, & y = \rho_x, \\ y = z_x, & y = k_x, & y = q_x. \end{cases}$$

Pirmoji iš tų kreivųjų galima pavadinti kosinusoida, sistemos $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, antroji jos tangensoida, trečioji — radiusoida, ir t. t.

Sulyginę lygybės (108) su lygybėmis (123) pamatysime, jog pirmoji šių pastarųjų eilė galima pakeisti lyginiais:

$$(124) \ldots \quad y = \operatorname{cotg} x, \; y = \sec x, \; y = \operatorname{cosec} x.$$

Tai reiškia, jog kosinusoida, tangensoida ir radiusoida sistemoj $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ yr' identiškos nūn paprastai vartojamosios sistemos kotangensoidai, sekansoidai ir kosekansoidai.

Antroji eilė (123) reiškia sistemos $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ sekansoidą, kotangensoidą ir kosekansoidą. Jų lyginiai (123) galima pakeisti lyginiais:

$$(125) \ldots y = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x, y = \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x, y = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Tai parodo, kad tos pastarosios trys linijos yra kur kas painesnės ir nūn paprastai vartojamoje sistemoje neturi sau identiškų.

Iš lyg. (123) galima taipgi išvesti ir atverstinės trigonometriškos funkcijos sistemoj $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$:

$$(126) \ldots \begin{cases} y = \operatorname{arc} c_x, & y = \operatorname{arc} t_x, & y = \operatorname{arc} \rho_x, \\ y = \operatorname{arc} z_x. & y = \operatorname{arc} k_x, & y = \operatorname{arc} q_x, \end{cases}$$

Jų diferencialai turės išvaizdą:

$$
(127)\ \ldots \left\{
\begin{aligned}
& d\ \mathrm{arc}\ c_x = -\frac{d\,x}{1+x^2}, \\
& d\ \mathrm{arc}\ t_x = \frac{d\,x}{x\sqrt{x^2-1}}, \\
& d\ \mathrm{arc}\ \rho_x = -\frac{d\,x}{x\sqrt{x^2-1}}, \\
& d\ \mathrm{arc}\ z_x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}, \\
& d\ \mathrm{arc}\ k_x = -\frac{\sqrt{2}\,d\,x}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+4x^2}}} \\
& \qquad = -\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+4x^2}}\,dx}{\sqrt{2}\,x\sqrt{1+4x^2}} \\
& d\ \mathrm{arc}\ q_x = -\frac{d\,x}{2\,x\sqrt{x-1}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Iš čia išeina, kad sistemoj $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ esama taipgi ir integralų:

$$
(128)\ \ldots \left\{
\begin{aligned}
& \int\frac{d\,x}{x\sqrt{x^2-4}} = -\ \mathrm{arc}\ z_x + C, \\
& \int\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+4x^2}}}{\sqrt{2}\,x\sqrt{1+4x^2}}\,d\,x = -\ \mathrm{arc}\ k_x + C, \\
& \int\frac{d\,x}{2\,x\sqrt{x-1}} = -\ \mathrm{arc}\ q_x + C \quad \text{ir t. t.}
\end{aligned}
\right.
$$

Is nurodytųjų lyginiuose (123) kreivųjų tik trys paskutinės yra įdomesnės, kaipo neturinčios nūn vartojamoje sistemoje sau identiškų kreivųjų. Bet ir jų detalis gvildenimas neįeina šio tyrinėjimo programon.

Kas aukščiau pasakyta apie naujòs sistemos $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ trigonometriškas ir ratilines funkcijas, galima pritaikinti taipgi ir kitų tiek elementarių tiek sukrautinių sistemų funkcijoms. Visos šios naujos funkcijos galima difencijuoti, dėstinėti ėilėmis; jos gali duoti pradžią naujiems integralams ir aplamai vesti prie įvairių pritaikinimų. Bet nenorėdami šį veikalą primurdyti daugybe naujų

formulų, bevelijam tą įdomų tyrinėjimą palikti pačių mėgstančių mokslą skaitytojų žingeidumui, kurs, tariamės, gausiai apsimokės gautų naujų rezultatų aibe.

XV.

Tyrinėdami 28 mūsų atrastas elementares sistemas ir kaikurias sukrautines mes visą laiką laikėmės Euklido geometrijos srity. Ši pastaroji buvo bendras jų pamatas, deliai to vienòs sistemos funkcijos galima buvo išreikšti pasigaunant kitų sistemų funkcijų.

Dabar pamėginkim' kaikurių aukščiau išgvildentų sistemų funkcijas sulyginti su joms atitinkančiomis vienos iš neeuklidinių (Lobačevskio) trigonometrijos funkcijomis.

Kaip yra žinoma, šioje pastaroje esama lygybių:

$$(129) \;.\;.\quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\, \Pi_{(x)} = e^{x} \text{ arba } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\, \Pi_{(x)} = e^{-x}$$

iščia, kaipo išvadą, gaunama:

$$(130) \;.\;.\quad \begin{cases} \sin \Pi_{(x)} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}, \\[2ex] \cos \Pi_{(x)} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \\[2ex] \operatorname{tg} \Pi_{(x)} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}} \end{cases}$$ [1]).

Sulyginus tuos reiškinius su formulomis (70) randame tarp sistemos $S^{s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ funkcijų ir joms atitinkančiųjų Lobačevskio trigonometrijos funkcijų sąryšį, nustatytą šiomis lygybėmis:

$$(131) \;.\;.\quad \begin{cases} c_{ix} \cdot \cos \Pi_{(x)} = -\, i, \\ \rho_{ix} \cdot \operatorname{cotg} \Pi_{(x)} = -\, i, \end{cases}$$

iš kur gausime:

$$(132) \;.\;.\quad \begin{cases} \sin \Pi_{(x)} = \dfrac{\rho_{ix}}{c_{ix}}, \\[2ex] \cos \Pi_{(x)} = -\dfrac{i}{c_{ix}} = \dfrac{1}{i\, c_{ix}}, \\[2ex] \operatorname{tg} \Pi_{(x)} = -\dfrac{\rho_{ix}}{i} = i\, \rho_{ix}. \end{cases}$$

---

[1]) М. Волковъ: Пантригонометрія. СПБ. 1886, 55 psl.

Taip pat iš (131) ir (75), darant šiose pastarose formulose $l = 1$ ir dedant x vietoj z, galima rasti sąryšis tarp sistemos $\mathop{S}\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=1}$ funkcijų ir joms atitinkančių sistemoj Lobačevskio funkcijų. Tą sąryši sudarys šios lygybės:

$$(133) \ldots \begin{cases} s_{ix} \cdot \sin \Pi(x) = 1, \\ c_{ix} \cdot \cos \Pi(x) = - i\, s_{ix}, \\ \rho_{ix} \cdot \cos \Pi(x) = - i, \end{cases}$$

iš kur gausime:

$$(134) \ldots \begin{cases} \sin \Pi(x) = \dfrac{1}{s_{ix}}, \\ \cos \Pi(x) = - \dfrac{i\, s_{ix}}{c_{ix}} = - \dfrac{i}{\rho_{ix}} = \dfrac{1}{i\, \rho_{ix}}, \\ \operatorname{tg} \Pi(x) = - \dfrac{i\, c_{ix}}{s^2_{ix}} = \dfrac{i\, \rho_{ix}}{s_{ix}}. \end{cases}$$

Panorėjus nesunku rasti taipgi ir kitų aukščiau išdėtųjų sistemų sąryšiai su Lobačevskio trigonometrijos funkcijomis, bet nuodugnesnis to klausimo gvildenimas, rodos, yra čia nereikalingas. Kad Lobačevskio sistemos simbolais yra galima išreikšti tòs ar kitòs šiame veikale išgvildentos sistemos formulos, tai ganėtinai jau yra nušvietusios formulos (130), (132), (134). Be to dvi pastaroji aiškiai nurodo, kad Lobačevskio sistemos apibūdinimas, kaipo sistemos menamos, nerealės (trigonométrie imaginaire), yra nebepamato.

XVI.

Aukščiau (IV—VII §§) mes nurodėme, kaip surandama geometriškų punktų S ir T vietų lyginiai atatinkantieji duotosioms trigonometriškoms sistemoms. Šitie uždaviniai, dagi net ir nepilnai išgvildomose sistemose, pasirodė esą galimi ir sulyginti lengvai gvaldomi. Nes jei esama tam tikros trigonometriškos sistemos, turinčios savo tam tikro didumo trigonometriškas linijas kiekvienam kampui, tai tuo pat joje geometriškos punktų S ir T vietos bus irgi griežtai nustatytos. Kitaip sakant — kiekvienai trigonometriškai sistemai turi atitikti

tam tikros, ją apibūdinančios, geometriškos punktų S ir T vietos, sudarančios tąs' ar kitas tiesiąsias ar kreivąsias linijas sulig atatinkančiųjų joms lyginių būdo.

Jei dabar nuo šio tiesiojo uždavinio eisime prie atverstinio, būtent: turint tam tikrą kreivąją ir prileidus, kad ji savaime reiškia tūlos trigonometriškos sistemos geometriškąją punkto S bei T vietą, surasti toji sistema, — tai klausimas, ar panašūs uždaviniai yra išgvaldomi, prisieis pripažinti atviru.

Nes kaip kitose matematikos skyriuose — šale tikrai galimųjų tiesioginių, sulyginti lengvų uždavinių (pav. laipsniavimo, lyginių sudarinėjimo, diferencijavimo funkcijų) esama ir atatinkanciųjų jiems atverstinių (šaknų rovimo, lyginių gvaldymo, funkcijų integravimo), kurie arba visai yra neišgvaldomi, arba teišgvaldomi vien didesniu bei mažesniu artutinumu, — taip ir mūsų atverstiniame uždavinyje yra galimi atskiri nevisiško arba net ir visiško neišgvaldomumo žygiai. Taip bent atrodo à priori, imant šį dalyką vien teorijos žvilgsniu.

Bet iš kitos šalies, kaip kituose atverstiniuose uždaviniuose (pav. funkcijų integravimo) yra plačių skyrių visai išgvaldomų, taip pat esti ir su mūsų atverstiniu uždaviniu. Pasigaunant tam tikro metodo, galima nevieną jo žygį lengvai išgvaldyti. To metodo ypatybėms paaiškinti, duodame žemiau keletą pavyzdžių:

1. Duota tūlos trigonometriškos sistemos geometriškoji punktų S vieta, reiškiama lyginiu:

$$(135) \ldots \quad a\,(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) = y\,\sqrt{x^2 + y^2};$$

surasti toji sistema.

Pažvelgę į lyg. (135) raudame jame du nekintamu dydžiu: a ir ϑ. Pastarasis, kaipo kampinis, rodo, kad ieškamoje sistemoje sinų ir tangensų krypsnis yra nekintamas ir lygus ϑ. Tuo būdu ieškomoji sistema bus tipo $S_{\varphi=\vartheta}$. Deliai to geometriškąjį jos vaizdą duos

mums 8 brėžinys, kame bus SN = s, ON = c, OS = OG = ϱ, TG = t, OT = z, QR = k ir t. t.

8 brėž.

Lieka sužinoti, ką ištikrųjų reiškia kitas ieškomoje sistemoje nekintamas dydis a.

Tuo tikslu kreipkimės į 8 brėz. Iš trikampio SNK betarpiškai turime:

$$(136)\ .\ .\ \begin{cases} SK = y = s \cdot \sin \vartheta \\ NK = x - c = s \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

Padauginę antrąji lyginį (136) daugikliu sin ϑ, o pirmąjį — cos ϑ ir atėmę pirmąjį padaugą iš antrojo, gausime:

$$(137)\ .\ .\ x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = c \cdot \sin \vartheta.$$

Pakeitę lyginyje (135) y ir x sin ϑ — y cos ϑ naujais reiškiniais iš (136) ir (137) ir patėmiję, kad šiame žygyje $\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho$, gausime:

$$a \cdot c \cdot \sin \vartheta = s \cdot \sin \vartheta \cdot \varrho,$$

iš kur turime:

$$a = \frac{\rho s}{c} = t.$$

Tuo būdu ieškomoji sistema bus $S^{\,t = a}_{\,\varphi = \vartheta}$.

2. Teesie tūlos trigonometriškosios sistemos geometriškoji punktų S vieta kreivoji išreikšta lyginiu:

$$(138)\ .\ .\ \frac{(x-a)^2 + y^2}{x-a} = \frac{x^2 + y^2}{x \sin \vartheta - y \cos \vartheta}.$$

5

Ši kreivoji buvo atrasta mums V Euklido postulatą betyrinėjant. Trumpumo deliai pavadinkime ją postulatoida. Kuriai gi trigonometriškai sistemai ji atitinka? Vienas pažvelgimas į lyginį (138) jau parodo, kad jame esama taipgi dviejų nekintamųjų dydžių a ir ϑ. Šis pastarasis nurodo, kad ieškomoje sistemoje sinų ir tangensų krypsnis bus nekintąs ir lygus ϑ, taip kad geometriškas jos vaizdas bus identiškas 8 brėžiniui. Tatai padarę kaip aukščiau tam tikrų pakeitimų, gausime iš (138) lyginį:

$$(139) \quad . . \frac{(c + s \cdot \cos \vartheta - a)^2}{c + s \cdot \cos \vartheta} = \frac{\rho^2}{c \cdot \sin \vartheta}.$$

Paėmus čia a nežinomuoju dydžiu, lyginys (139) bus antrojo laipsnio. Trumpumo deliai teesie f (s, c, ϱ, ϑ) = a to gvaldymo rezultatas. Tuo būdu ieskomoji sistema turės formą: $S_{\varphi = \vartheta}^{f(s, c, \rho, \vartheta) = a}$.

Deliai nemažo funkcijos f (s, c, ϱ, ϑ) painumo sistema $S_{\varphi = \vartheta}^{f(s, c, \rho, \vartheta) = a}$ bus irgi paini. Bet prileidus funkcijoje f (s, c, ϱ, ϑ) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ji žymiai prastėja virsdama į $c - \varrho = a$, taip kad sistema $S_{\varphi = d}^{f(s, c, \rho, \vartheta) = a}$ virsta tuomet į $S_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{c - \rho = a}$, o pati postulatoida iš 3-jo laipsnio kreivosios persikeičia į hiperbolę.

3. Prileiskim toliau, kad ta pati postulatoida (138) reiškia tūlos sistemos geometriškąją punktų T vietą. Klausiama, kokiagi bus toji sistema?

Norint į tai atsakyti, reikia vėl kreiptis į 8 brėz., kurs reiškia ieškomosios sistemos geometriškajį vaizdą. Žinodami, kad ϑ reiškia sinų ir tangensų krypsnio nekintamąjį dydį, iš trikampio GTL kitam nekintamam a surasti turime:

$$(140) \quad . . \begin{cases} TL = y = t \cdot \sin \vartheta \\ GL = x - \rho = t \cdot \cos \vartheta \end{cases}.$$

---

[1]) Sk. mūsų brošiūrą: Pri unu speco de kurbaj linioj, koncernantaj la V^an^ Euklidan postulaton. Berlino Esperanto Verlag Möller et Borel, 1906.

Padauginę pirmąjį iš lyginių (140) daugikliu cos ϑ, o antrąjį kitu, lygiu sin ϑ ir pirmąjį padaugą atėmę iš antrojo, gausime dydžiui $x \sin \vartheta - y \cos \vartheta$ naują reiškinį, kurį įštatę lyginin (137), o taipgi pakeitę y reiškiniu $t \cdot \sin \vartheta$ iš (140) ir patėmiję, jog šiame atvejyje $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, rasime:

$$(141) \ldots \frac{(\rho + t \cdot \cos \vartheta - a)^2}{\rho + t \cdot \cos \vartheta} = \frac{z^2}{\rho \cdot \sin \vartheta}.$$

Paėmus čia a nežinomuoju dydžiu, lyginys (141) bus antrojo laipsnio. Trumpumo deliai teesie $f(t, z, \varrho, \vartheta) = a$ to gvaldymo rezultatas. Ieškomoji sistema bus tad

$$S \begin{array}{l} f(t, z, \rho, \vartheta) = a \\ \varphi = \vartheta \end{array}, \text{ kuri prie } \vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ virs į } S \begin{array}{l} \frac{\rho}{c}(c - \rho) = a \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array}.$$

Iš čia matom, jog postulatoidoj šiame atvejyje bus taipgi ir santykių:

$$(142) \ldots \frac{\rho}{c} = \frac{a}{c - \rho}.$$

Lyginys (142) parodo, jog mūsų atverstinis uždavinys gali kartais privesti ne vien prie suradimo ieškomosios sistemos, bet ir prie atradimo naujų duotosios kreivos ypatybių.

Be to iš 2 ir 3 pavyzdžio gaunam gan interesingą išvadą, jog duotoji kreivoji gali atitikti ne vienai tik, bet ir dviem įvairiom sistemom.

Skaitytojui pirmąsyk susitikančiam su šiuo faktu gali pasirodyti tai keistoka. Ištikrųjų gi čia nėra nieko ypatinga. Nes kaip gvildant m-jo laipsnio lyginį, gali x-ui atitikti ne viena, bet m reikšmių, taip pat ir mūsų atverstiniam uždaviny vienai kokiai kreivajai gali atitikti ne viena, ne dvi net, bet ir daugiau trigonometriškų sistemų.

Tuo žvilgsniu mūsų atverstiniam uždavinyje yra galimi ir nenustatomumo žygiai. Pavyzdžiui, jei turint geometriškąją tūlos sistemos, punktų S vietą išreikštą lyginiu:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

reikėtų surasti toji sistema, tai atsidurtumėm painiame padėjime, nes kreivai, išreikštai tuo lyginiu atitiktų net šešios sistemos:

$$S^{\rho=r}_{s=a},\ S^{\rho=r}_{t=a},\ S^{\rho=r}_{z=a},\ S^{\rho=r}_{c=a},\ S^{\rho=r}_{k=a},\ S^{\rho=r}_{q=a},$$

kaip tai matyt iš lyginių (24), (25), (26), (27), (28), (29).

Taippat, jei turint geometriškąją tūlos sistemos punktų T vietą, išreikštą lyginiu:

$$y^2 = b^2 - x^2$$

reikėtų surasti toji sistema, tai vėl rastumėm ne vieną, bet keletą atitinkančių jai šistemų, būtent: $S^{s=a}_{z=b}$, $S^{t=a}_{z=b}$, $S^{k=a}_{z=b}$ ir t. t.

4. Norint išvengti nurodyto nenustatomumo, reikia duotosios sistemos abu lyginiu taip geometriškosios punktų S taip ir punktų T vietos drauge imti domėn. Tuomet tas nenustatomumas pats savaime pranyksta. Pav. teesie šale lyginio:

$$(143)\ .\ .\quad y^2 = r^2 - x^2$$

reiškiančio geometriskąją punktų S vieta ir kitas

$$(144)\ .\ .\quad y^2 = \frac{r^4}{a^2} - (x - r)^2,$$

reiškiąs tos pat sistemos geometriškąją punktų T vietą.

Pažvėlgę į tuodu lyginiu, matome juose du nekintamuoju dydžiu *r* ir *a*. Aiškų, kad pirmasai reiškia stipiną. Belieka sužinoti, ką keiškia antrasai *a*.

Tuo tikslu įsivaizdinkime sau geometriškąjį ieškomosios sistemos vaizdą. Jis bus identiškas 8 brėžiniui, tik tuo skirtumu kad, ten sinų ir tangensų krypsnis buvo nekintamas, o čia kiekvienam kampui bus kitoks ir kintamas.

Iš aukščiau nurodyto brėžinio betarpiškai turime:

$$SN^2 = s^2 = r^2 + c^2 - 2\,rc \cdot \cos \alpha,$$

iškur gauname:

$$(145)\ .\ .\quad \cos \alpha = \frac{r^2 + c^2 - s^2}{2\,r\,c}.$$

Iš to pat brėžinio randame taipgi:

$$(146) \;.\;.\; \begin{cases} TL = y = z \sin \alpha \\ OL = x = z \cos \alpha \end{cases}.$$

Įstačius tuos reiškinius (145) ir (146) į (144) lyginį, gausime:

$$z^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{r^4}{a^2} - (z \cos \alpha - r)^2,$$

iš kur randame:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 z^2 + a^2 r^2 - r^4}{2 a^2 r z}.$$

Sulyginus šį reiškinį su aukščiau gautuoju (145), gaunama lyginys:

$$\frac{a^2 z^2 + a^2 r^2 - r^4}{2a^2 r z} = \frac{r^2 + c^2 - s^2}{2 r c},$$

iš kurio galutinai gausime:

$$a = \frac{r c}{s} = k.$$

Tuo būdu atatinkančioji abiem aukščiau minėtom punktų S ir T vietom sistema bus $S\,{\rho = r \atop k = a}$.

5. Esama dar prastesnių žygių. Pav. teesie lyginiai:

$$y^2 = ab - x^2$$
$$y^2 = a^2 - x^2$$

reiškiantys tūlos sistemos geometriški punktų S ir T vieti. Norint sužinoti, kokia ji bus, perkelkim x^2 pirmojon lyginio dalin; tuomet betarpiškai gausime:

$$y^2 + x^2 = \rho^2 = ab$$
$$y^2 + x^2 = z^2 = a^2,$$

iškur randame:

$$a = z$$
$$b = \frac{\rho^2}{a} = \frac{\rho^2}{z} = \rho^2 : \frac{\rho^2}{c} = c.$$

Todel ieškomoji sistema bus $S\,{z = a \atop c = b}$.

Nurodytasai gvaldymo atverstinių uždavinių metodas, rodos, šiais keliais pavyzdžiais ganėtinai yra išaiškintas. Apibendrinti ir išplėtoti jį — tai ateities dalykas. Šiame veikale platesniu to klausimo gvildenimu mes neužsi-

imsime. Užteks čia pridūrus vieną vienintelę pastabą nebent apie tai, jog kaip kiekviena trigonometriškoji sistema turi po dvi ją apibūdinanti geometriški punktų S ir T vieti[1]), taip ir atvirščiai kiekviena kreivoji gali atitikti tūlai trigonometriškai sistemai, kaipo jos geometriškoji punktų S bei T vieta.

Aukščiau nurodytasai sugretinimas naujų trigonometriškų sistemų su kreivomis linijomis, dėdamas pamatus naujam vaisingam metodui — pritaikinimo naujos trigonometrijos analitiškai geometrijai, gali, mūsų išmanymu, duoti pradžią naujai matematiškųjų mokslų šakai, nelyginant kaip savo laiku Dekarto sugalvotu pritaikinimu algebros geometrijai sutverta tapo analitiškoji geometrija. Dekarto metodu ji buvo sualgebraizuota, šiuo gi mūsų nauju metodu, ji taps sutrigonometrizuota. Šiai naujai geometrijos trigonometrizacijos idejai, mes ketiname netrūkus pavesti atskirą veikalą. Čia gi teesie mums leista pasitenkinti vien trumpučiu nurodymu, kad naujòs matematikos šakòs atsiradimas yra galimas, ir pereiti paskutinin šio tyrinėjimo skyriun.

XVII.

Aukščiaus nurodėme, kad naujų trigonometriškų sistemų sritis yra begaliniai plati. Nuodugniai jąs pažinti, ištirti, nurodyti įvairius naujų trigonometriškų funkcijų pritaikinimus įvairiuose mokslo klausimuose — tai ateities dalykas. Mūsų veikalo programa jau išsemta. Lieka vien žvilgterėti atgal ir padaryti trumputė pasiektųjų rezultatų sąskaita. Štai ji:

---

[1]) Tolesni tyrinėjimai yr parodę, jog kiekvieną trigonometrišką sistemą charakterizuoja ne dvi, bet trys kreivosios linijos: sinusalė tangensalė ir kotangensalė. (Sk. apie tai mūsų veikale „Kreivųjų linijų trigonometrizacijos pagrindai“ II-jį priedą „Apie kotangensales“). Todel ir kalbamasis atverstinis uždavinys pilnai išgvaldyti tegalima tiktai atsižvelgiant susyk į visų trijų (sinusalės, tangensalės ir kotangensales) linijų lyginius.

1. Nūn paprastai vartojamoji trigonometriška sistema nėra absolūti nei vienintelė. Ji yra tik vienos bendresnės sistemos $S_{\varphi=a}^{\rho=r}$ vienas iš nesibaigiamos daugumos žygių.

2. Ši pastaroji sistema $S_{\varphi=a}^{\rho=r}$, savo žaru, yra viena iš 28 naujų elementarių trigonometriškų sistemų, kurios taipgi gali turėti begalinę daugybę rūšių.

3. Šale tų 28 elementarių sistemų esama da ir įvairiausių sukrautinių sistemų. Jų rūšių skaičius yra taipgi begaliniai didelis.

4. Tòs arba kitòs trigonometriškos sistemos geometriškojo vaizdo prastumas bei painumas nepareina nuo to, ar ji bus elementarė ar sukrautinė. Geometriškas šių pastarųjų brėžimas esti kartais net kur kas lengvesnis, kaip tūlos elementarės sistemos brėžimas (построенiе). Prie sukrautinių, o ne prie elementarių pridera ir visų prasčiausioji iš mūsų atrastųjų — sistema $S_{t\ :\ s=1}^{\rho^2-c^2=1}$.

5. Kiekviena trigonometriškoji sistema, ar ji bus elementarė ar sukrautinė, turi savotiškas trigonometriškas funkcijas, kurioms geometriškame sistemos vaizde atatinka tam tikros trigonometriškos linijos, įvairuojančios sulig sistemų įvairumo.

6. Tų funkcijų ypatybės plaukia iš jų santykiavimų su nūn vartojamosios sistemos funkcijomis.

7. Esama savitarpinio kaitaliojimosi vienòs trigonometriškos sistemos funkcijų į kitòs sistemos funkcijas, išskyrus žygius, kuomet sistema nutrūksta bei virsta nereale.

8. Tarp naujų sistemų funkcijų vienos yra identiškos nūn paprastai vartojamosios sistemos funkcijoms, kitos yra mažiau ar daugiau painūs šių pastarųjų funkcijų sujungimai; tačiau šis identiskumas tepaliečia vien tų funkcijų esmę, o ne jų trigonometriškąjį modą bei apsireiškimą. To dėka ta pati funkcija gali vienoj sistemoj vaidinti rolę sino, kitoj — tangenso, trečioj — sekanso ir t. t.

9. Brėžiant geometriškąjį sistemos vaizdą, lengvai galima gauti trigonometriškos SN ir TG linijos, atitinkančios duotosios sistemos sinų ir tangensų funkcijoms, ir analitiškai tam tikrais lyginiais išreikšti geometriškos punktų S ir T vietos.

10. Tie lyginiai sudaro vieną iš tipiškiausių kiekvienos sistemos ypatybių. Geometriškai jiems atitinka eilė tiesiųjų linijų, ratilų, elipsių, parabolių, hiperbolių ir aukštesnio už antrąjį laipsnio kreivųjų.

11. Kiekvienoje sistemoje galima gauti savos sinusoidos, tangensoidos ir t. p. kreivosios. Kaikurios iš jų esti tokios pat, kaip joms atitinkančios nūn vartojamojoj sistemoj linijos; kitos yra painesnio tipo kreivosios.

12. Greta naujų trigonometriškų funkcijų galima taipgi kiekvienoj sistemoj sudaryti ir naujų ratilinių funkcijų. Ir vienos ir kitos galima diferencijuoti, integruoti, išdėstinėti eilėmis ir apskritai vartoti gvildant įvairius uždavinius, pav. gvaldant trikampius ir t. t.

13. Šale tiesioginio uždavinio: turint bet kokios trigonometriškos sistemos sąlygas, išreikšti tam tikrais lyginiais geometriškas punktų S ir T vietos, — galimi ir atverstiniai uždaviniai: turint išreikštas bet kokių sistemų geometriškąsias punktų S ir T vietas tam tikrais lyginiais, surasti atitinkančios joms trigonometriškos sistemos. Tos rūšies uždaviniai turi didelės svarbos, nes duoda progų surasti tų kreivųjų naujas ypatybes.

14. Visa, kas aukščiau pasakyta, dera vien tik tiesialinijinei trigonometrijai. Sferiškosios trigonometrijos srities mes čia visai esam nelietę.

15. Ypatingai įdomios yra sukrautinės trigonometriškos sistemos tipo $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$. Jų tyrimas yr davęs daug naujų rezultatų, kuriuos ir išdėjome atskirame veikale „Kreivųjų trigonometrizacijos pagrindai“.
